Stahl's

Combinationslehre

nebst Anwendung derselben
auf die Analysis.

Laden Preiss 1 thlr. 20 gr. Sächs. oder 3 fl. 18 kr. Rhein.

Zur Königl. Studien-Anstalt in Bamberg.

AGB
P. 34

Grundriſs

der

Combinationslehre

nebſt

Anwendung derſelben

auf

die Analyſis

von

D. Conrad Diedrich Martin Stahl,

Profeſſor auf der Univerſität zu Jena.

Jena und Leipzig,

bei Chriſtian Ernſt Gabler

1800.

P 34

K. B. GYMNAS. BIBLIOTHEK BAMBERG

Staatliche
Bibliothek
Bamberg

Sr. Hochwohlgebornen

dem

Herrn

Johann Wolfgang von Göthe,

Sächsisch-Weimarschen wirklichen Geheimenrathe,

dem

Verehrer und Beförderer

alles Wahren, Schönen und Guten

in tiefster Ehrfurcht

gewidmet.

Vorbericht.

Leibnitz war der Erste, welcher die Wichtigkeit der Combinationslehre für die Analysis ganz wahrnahm und sich daher bemühete, sie zu vervollkommnen und in den Stand zu setzen, dass sie auf die Analysis überhaupt, angewandt werden könnte. Er erreichte aber seinen Zweck nicht, theils weil er einige combinatorische Operationen z. B. das Combiniren und Variiren zu bestimmten Summen nicht in seine Gewalt bekam, theils auch weil er nicht auf die schicklichsten Zeichen verfiel. Nachher machten freilich Mehrere, von den Combinationen und Versetzungen auf die Analysis Anwendungen z. B. Cramer bei

dem Eliminiren der unbekannten Gröſsen nnd Boſcowich und Caſtillon bei der Potenzirung der Polynomien, aber an die Beſtimmung feſter Regeln für jede einzelne combinatoriſche Operation und an eine Zeichenſprache, welche den Weg der Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis überhaupt, gebahnt hätte, wurde nicht gedacht, ſondern man begnügte ſich mehrentheils mit der Feſtſetzung der Regeln die Anzahl der Complexionen zu beſtimmen, welche die einzelnen combinatoriſchen Operationen geben und lieſs alſo die Combinationslehre im Ganzen unbearbeitet. So war der Zuſtand dieſer Wiſſenſchaft als Hindenbürg auf ihre Wichtigkeit für die Analyſis aufmerkſam gemacht wurde. Er fing ſogleich an, feſte Regeln für die einzelnen combinatoriſchen Operationen feſtzuſetzen und auf eine Zeichenſprache zu denken, durch welche ihre Anwendung auf die geſammte Analyſis möglich und leicht gemacht würde. Mit ſeinen Entdeckuugen machte er uns ſeit 1778 in einzelnen Schriften bekannt, in welchen

er

nach und nach die combinatorischen Operationen vereinfachte, neue hinzufügte, seine zeichensprache vervollkommnete und ihren Nutzen für die Analysis durch wirkliche Anwendung darthat. Seine combinatorische Abhandlung die VIte in der Schrift: der Polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis, Leipzig 1796, fing aber erst an ein allgemeines Interesse für sein System zu erregen, denn ausser Hindenburgs Schülern, scheinen sich vorher nur Klügel, Pfaff und Kramp ernstlich dafür interessirt zu haben. Ich gestehe es gern, dass auch mir erst durch diese Schrift die Augen geöffnet wurden, aber von diesem Augenblicke an, habe ich auch keinen grössern Wunsch gehabt, als durch eine zusammenhängende vollständige Darstellung des ganzen Hindenburgischen Systems das Studium desselben erleichtern und dadurch mehr verbreiten zu können. Mehrere zusammentreffende Umstände hinderten mich eher als jetzt diesen Wunsch zu erfüllen und erlaubten mir am Ende doch nicht ganz so viele Zeit auf die Ausarbei-

tung zu verwenden, als ich dazu hätte haben müssen. Ich selbst habe daher noch manches gegen meine Schrift zu erinnern, welches aber doch nicht sowohl die Sache selbst als vielmehr die Form betrift.

Die ganze Schrift zerfällt in drei Abschnitte: Im ersten wird von der Combinationslehre überhaupt gesprochen und eine rein arithmethische Abhandlung gegeben; der zweite enthält die eigentliche Combinationslehre und der dritte zeigt wie diese auf die Entwickelung der Produkte, der Dignitäten, der Quotienten und der Umkehrung der Reihen angewandt werden kann. — Hierbei konnte ich nur von den Combinationen und Variationen mit Wiederholungen Gebrauch machen, ich behalte es mir daher vor, in der Folge noch die Anwendung der übrigen Operationen zu zeigen.

Ich halte es für unnöthig hier speciell anzugeben was mir bei dieser Schrift eigenthümlich zugehört und würde überhaupt davon schweigen wenn ich nicht glaubte

zur Erleichterung der richtigen Beurtheilung derselben folgendes sagen zu müssen. Bei der Bearbeitung der eigentlichen Combinationslehre war mein Hauptgesichtspunkt, Hindenburgs aufgestellte Sätze systematisch darzustellen und streng zu beweisen; der Plan den ich hierbei vor Augen hatte, machte nothwendig, daſs ich eine rein arithmetische Abhandlung voranschickte. Die Art und Weise überhaupt betrachtet, wie ich im dritten Abschnitte die analytischen Sätze behandele ist ganz die Hindenburgische; bei der nähern Entwickelung dieser Sätze aber und bei dem systematischen Ableiten derselben aus einander bin ich meinen eigenen Weg gegangen.

In Rücksicht auf den Druck muſs ich folgendes bemerken: Zu den Klassenzeichen und Binominalcoefficienten wollte ich zwar absichtlich gröſsere Lettern als zur Textschrift haben, weil mir dieses in mehrern Hinsichten nützlich zu seyn schien z. B. um sie destomehr von den Coefficienten zu unterscheiden, wenn hierzu groſse Buchsta-

ben genommen werden; es war aber mein Wille nicht, daſs dieſe Lettern ſich ſo beträchtlich durh ihre Gröſse von den übrigen auszeichnen ſollten, als in dieſer Schrift der Fall iſt, ich wurde aber gezwungen dieſe Lettern zuzulaſſen, weil die Buchſtaben 𝔑, 𝒩, 𝔐, ℳ in der Druckerei nicht kleiner vorhanden waren. — Auf die Correctheit des Drucks habe ich zwar viele Mühe verwandt, aber demungeachtet iſt es mir wegen der vielen Schwierigkeiten, welche der Druck machte, doch nicht gelungen, ſie von bedeutenden Druckfehlern gänzlich frei zu machen. Es iſt daher nothwendig, daſs man beim Leſen gleich anfangs auf das angehängte Verzeichniſs der Druckfehler Rückſicht nimmt.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Combinationslehre.

Gegenstand der Combinationslehre. Seite 1—3

Erklärung des arithmetisch combinatorischen und rein combinatorischen Verfahrens. — 3—4

Angabe der arithmetischen Aufgaben, auf welche sich das arithmetisch-combinatorische Verfahren gründet. — 4—5

Entwickelung der Regeln wie man absolut und bedingt für eine Zahl die nächstgrössere findet. — 6—14

Aufgabe mit gegebenen Zifern entweder alle Zahlen zu schreiben, die sich damit schreiben lassen, oder nur die welche unter bestimmten Einschränkungen damit geschrieben werden können. — 14—23

Zwei-

Zweiter Abschnitt.

Combinationslehre.

1) Von den Complexionen überhaupt.

Erklärung der verschiedenen Complexionen, des Wiederholungsexponenten, der Klassen und des Zeigers. Seite 24—28

2) Von den Involutionen und Evolutionen überhaupt.

Begriff der Involution und Eintheilung derselben in vollständige und unvollständige. — 28—32

3) Von den Versetzungen.

Erklärung was unter Versetzen verstanden wird: Aufgaben alle Versetzungen mehrerer gegebener Elemente zu finden, nebst andern hiervon abhängenden Aufgaben: Bestimmung der Anzahl der Versetzungen. — 32—50

4) Von den Combinationen.

Erklärung des Begriffs Combiniren, Eintheilung desselben und Bezeichnung der Combinationsklassen. — 50—54

α) Von dem Combiniren überhaupt mit Wiederholungen. — 54—71

β) Von dem Combiniren überhaupt ohne Wiederholungen. — 72—86

γ) Von dem Combiniren zu bestimmten Summen mit Wiederholungen. — 86—120

δ) Von dem Combiniren zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen. — 120—128

ε) Von dem Combiniren mehrerer Reihen. — 128—137

5) Von

5) Von den Variationen.

Erklärung und Eintheilung des Variirens, Bezeichnung der Variationsklassen. Seite 137—139

α) Von dem Variiren überhaupt mit Wiederholungen. — 140—149

β) Von den Variiren überhaupt ohne Wiederholungen. — 150—159

γ) Von dem Variiren zu bestimmten Summen mit Wiederholungen. — 159—177

δ) Von dem Variiren zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen. — 177—181

ε) Von dem Variiren mehrerer Reihen. — 181—189

6) Gleichungen für die Combinationen und Variationen.

α) Gleichungen für die Combinationen mit Wiederholungen. — 190—191

β) Gleichungen für die Combinationen ohne Wiederholungen. — 191—192

γ) Gleichungen für die Variationen mit Wiederholungen. — 192—193

δ) Gleichungen für die Variationen ohne Wiederholungen. — 193—194

Erklärung des Polynomialcoefficienten. — 195

ε) Gleichungen zwischen Combinationen und Variationen mit Wiederholungen. — 195—196

ζ) Gleichungen zwischen Combinationen und Variationen ohne Wiederholungen. — 197

Dritter Abſchnitt.

Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis.

I. Erklärung analytiſcher Zeichen. Seite 199—202

II. Combinatoriſche Entwickelung der Produkte mehrerer Reihen. — 202—220

III. Combinatoriſche Entwickelung der Dignitäten der Reihen. — 221—252

IV. Combinatoriſche Entwickelung der Produkte der Dignitäten mehrerer Reihen. — 252—271

V. Combinatoriſche Entwickelung der Quotienten mehrerer Reihen. — 271—307

VI. Umkehrung der Reihen. — 307—322

Verzeichniſs combinatoriſcher Schriften.

Grund-

Grundriſs der Combinationslehre nebſt Anwendung derſelben auf die Analyſis.

Erſter Abſchnitt.

Einleitung in die Combinationslehre.

§. 1.

Die Combinationslehre beſchäftigt ſich mit der Zuſammenſetzung gegebener Dinge zu mehrern Ganzen. Die gegebenen Dinge nennt ſie Elemente, bezeichnet ſie im allgemeinen mit Buchſtaben und zeigt das Zuſammenſetzen derſelben durch ein bloſses Schreiben neben einander an.

Sind mehrere Elemente a, b, c, d, e, zum Zusammensetzen gegeben, so lassen sich im allgemeinen hier drei Aufgaben denken:

1) Es werden alle Ganze verlangt, die sich aus den Elementen für die Bedingung zusammensetzen lassen, dass in einem jeden Ganzen alle Elemente vorkommen, aber in dem einem immer anders als in jedem der übrigen geordnet seyn sollen z, B. a b c d e und b c a d e. Die Ganzen müssen sich also blos durch die Form von einander unterscheiden. Das Anordnen der gegebenen Elemente auf jede mögliche Weise neben einander, wird Versetzen und eine jede der gefundenen Anordnungen eine Versetzung genannt.

2) Es sollen ausser den gegebenen Elementen noch alle Ganze angegeben werden, welche sich durch die Verbindung von zwei, drei, vier Elementen u. s. w. unter der Bedingung darstellen lassen, dass sich keines der Ganzen von einem andern blos durch die Anordnung seiner Elemente unterscheiden darf. Der Unterschied der Ganzen muss also nicht blos formell sondern er muss materiell seyn. Die Handlung wodurch man sie erhält, heisst Combiniren und ein jedes dadurch gefundene Ganze, eine Combination.

3) Es werden nicht nur alle materiell von einander verschiedene Ganze verlangt, welche die Elemente a, b, c, d, e, zulassen, sondern auch alle mögliche Formen dieser Ganzen, welche das verschiedentliche Anordnen ihrer Elemente giebt, also überhaupt alle formell oder materiell von einander verschiedene Ganze, die nur immer für die gedachten Elemente statt finden. Man würde hier offenbar seinen Zweck erreichen, wenn man erst-

lich alle Combinationen der Elemente und hierauf von jeder Combination wieder alle Verſetzungen aufſuchte. Es laſsen ſich aber auch beide Handlungen in eine einzige vereinigen und dieſe wird dann Variiren und ein jedes der dadurch gefundenen Ganzen eine Variation genannt.

Dieſe drei Aufgaben geben alſo überhaupt drei combinatoriſche Operationen: Verſetzen, Combiniren und Variiren und mehrere als dieſe finden daher auch nicht ſtatt. Es laſſen ſich aber die beiden letzten unter verſchiedenen Bedingungen verrichten: 1) daſs in den Combinationen und Variationen ein jedes der gegebenen verſchiedenen Elemente mehreremal, 2) daſs ein jedes darinn nur *ein*mal vorkommen darf. Dies giebt die Eintheilung des Combinirens und Variirens in Combiniren und Variiren mit und ohne Wiederholungen. 3) Eben ſo kann man auch die Bedingung hinzufügen, daſs wenn die Elemente auf beſtimmte Zahlen bezogen werden, die Summe der Elemente einer Combination oder Variation eine beſtimmte Zahl ſeyn ſoll. Hieraus entſteht die Eintheilung des Combinirens und Variirens in Combiniren und Variiren überhaupt und zu beſtimmten Summen. Bei dieſen wird auf eine Summe geſehn, bei jenen aber nicht. *a*).

§. 2.

Die combinatoriſchen Operationen laſſen ſich auf ein bloſses Aneinanderfügen und Untereinanderſetzen der Elemente ſo reduciren, daſs die Vorſchriften hierfür ganz unabhängig von Sätzen jeder Wiſſenſchaft ſind. Es iſt daher die Combinationslehre in ſofern eine ſelbſtändige Wiſſenſchaft. Der Übergang aus ihr in die Arithmetik iſt äuſserſt leicht, weil die arithmetiſchen Operationen nichts anders als bedingte combinatoriſche ſind, ſo daſs

 ſchon

a) Eine ausführlichere Erklärung der combinatoriſchen Operationen wird an gehörigen Orte gegeben werden.

schon das blosse Schreiben der Zahlen in natürlicher Ordnung eine bestimmte combinatorische Operation ist. Ja die Verbindung der combinatorischen Sätze mit den arithmetischen ist so einfach, dass man durch ein blosses bedingtes Schreiben der Zahlen alle drei genannte Operationen verrichten kann, wenn man die gegebenen zu bearbeitenden Elemente auf Zahlen bezieht. Nimmt man bei der Behandlung combinatorischer Aufgaben die Arithmetik zu Hülfe, so verfährt man arithmetisch combinatorisch, im entgegengesetzten Falle aber rein combinatorisch.

§. 3.

Die rein combinatorische Behandlung hat grosse Vorzüge vor der arithmetisch combinatorischen, weil jene einfacher und daher leichter ist und bei ihr nicht wie bei dieser eine Umsetzung der Zahlen in die gegebenen Elemente nöthig ist und weil sich bei der rein combinatorischen für die Anwendung sehr wichtige Darstellungen des Geforderten geben lassen, die sich bei der arithmetisch combinatorischen nicht darbiethen. Indessen so wahr dieses auch ist, so wird es doch bei dem Vortrage der Combinationslehre zweckmässig seyn die combinatorische Behandlung wenigstens nicht ganz zu übergehn um die Richtigkeit dessen, was jetzt und vorhin in §. 2. gesagt ist deutlich vor Augen zustellen. Es sollen daher von den combinatorischen Aufgaben, deren arithmetische Auflösung nicht zu verwickelt wird, sowohl arithmetisch combinatorische als rein combinatorische Auflösungen gegeben werden. Damit aber die zur arithmetischen Behandlung nothwendigen arithmetischen Aufgaben, den systematischen Vortrag der Combinationslehre nicht unterbrechen, ist es nothwendig, dass sie hier angegeben und die Wahrheiten worauf sie sich gründen, systematisch entwickelt werden.

§. 4.

Die gedachten arithmetischen Aufgaben sind solche, nach welchen mit gewissen gegebenen Zifern entweder

alle

alle Zahlen geſchrieben werden ſollen, die damit geſchrieben werden können, oder nur die Zahlen, welche ſich damit für gewiſse angegebene Bedingungen ſchreiben laſſen, aber in beiden Fällen ſo, daſs man bei dem Schreiben der Zahlen allemal von der kleinern zur gröſsern übergeht. Die erwähnten Bedingungen ſind: 1) Es ſollen in den Zahlen die Zifern ſo von der Linken nach der Rechten auf einander folgen, daſs nie eine gröſsere vor einer kleinern ſteht; d. h. die Zahlen ſollen gutgeordnet ſeyn. 2) Die Summe die man durch die Addition der einzelnen Zifern der Zahlen erhält, ſoll eine gewiſse beſtimmte ſeyn. 3) Es ſoll bei gegebenen verſchiedenen Zifern keine in einer Zahl öfter als einmal vorkommen. *a*), 4) Es ſollen ſich die Zahlen nur durch die Anordnung ihrer Zifern von einander unterſcheiden.

§. 5.

Die Auflöſung dieſer Aufgaben iſt leicht ſo bald man weiſs, wie man von einer gegebenen Zahl zu der kömmt, welche von ihr, abſolut oder unter den eben (§. 4.) gedachten Bedingungen, die nächſtgröſsere iſt. Bei der Beſtimmung der Art und Weiſe wie dieſes geſchieht, ſoll ein Zahlenſyſtem mit einer unbeſtimmten Anzahl von Grundzeichen zum Grunde liegen, es ſollen aber in dieſem Syſteme, wie bei dem gewöhnlichen, die Werthe der Zifern einer Zahl wachſen, deſto weiter ſie ſich in ihr, in Rückſicht auf ihre Stelle, von der erſten Stelle zur Rechten befinden. Zu den Beiſpielen wird das decadiſche gebraucht.

 Ent-

a) Wenn eine combinatoriſche Aufgabe die dritte Bedingung enthält, ſo wird ihre arithmetiſche Auflöſung mühſam; ſolche combinatoriſche Aufgaben werde ich daher nur rein combinatoriſch auflöſen und ſie deswegen unter den arithmetiſchen Aufgaben übergehn.

Entwickelung der Regeln wie man abſolut und bedingt (§. 5.) für eine Zahl die nächſt gröſsere findet.

§. 6.

1. *Satz.*

Eine $m+1$ zifrige Zahl iſt gröſser als jede *m*zifrige.

2. *Satz.*

Schreibt man eine gewiſse Zifer p ſowohl vor eine gröſsere als kleinere *m*zifrige Zahl, ſo iſt die $m+1$ zifrige, welche aus der gröſsern *m*zifrigen entſteht, gröſser als die welche man aus der kleinern *m*zifrigen erhält.

3. *Satz.*

Wenn ſich zwei $m+1$ zifrige Zahlen bloſs dadurch von einander unterſcheiden, daſs ſich die eine mit q und die andere mit p anfängt, ſo iſt die mit der Anfangszifer q gröſser als die mit der Anfangszifer p, wenn q gröſser als p iſt. Z. B. 35426 iſt gröſser als 25426. (2. Satz).

4. *Satz.*

Eine Zahl wird gröſser wenn man für irgend eine ihrer Zifern eine gröſsere ſetzt und ſie wächſt um deſto weniger, deſto kleiner die ſubſtituirte und deſto geringer die Ordnung der Zifer iſt, für welche man ſubſtituirt hat. Man vergröſsert daher eine Zahl durch Subſtitution einer Zifer ſo wenig als möglich, wenn man in die Stelle der Zifer, welche die geringſte Ordnung hat, eine um 1 gröſsere Zifer ſetzt.

5. *Satz.*

Eine Zahl wird gröſser, wenn irgend eine ihrer Zifern vergröſsert wird, wenn man auch gleich alle Zifern geringerer Ordnung verkleinert. Es iſt z. B. 235999 kleiner als 236111.

6. *Satz.*

Wenn man in einer Zahl eine Zifer der pten Ordnung vergröſsert, ſo wird hierdurch relativ die geringſte Vergröſserung der Zahl bewirkt, wenn für alle Zifern geringerer Ordnung, die geringſte Zifer geſetzt wird, (5. Satz). Will man daher von einer Zahl die nächſtgröſsere haben und die letzten *m* Zifern laſsen keine Vergröſserung mehr zu, ſo muſs man für die welche, von der letzten angerechnet, die m + 1te iſt die nächſtgröſsere Zifer ſchreiben, und für jede der gedachten *m* Zifern, die geringſte ſubſtituiren, Sollte aber gar keine Zifer eine Vergröſserung zulaſsen, ſo muſs man ihnen 1 vorſchreiben und in ihre Stelle die geringſte Zifer ſetzen. *a*). z. B. die nächſtgröſsere Zahl für 139 iſt 140, für 1599 die Zahl 1400 und für 999 die Zahl 1000.

7. *Satz.*

Eine Zahl wird verkleinert, wenn man eine Zifer der pten Ordnung kleiner macht, wenn auch ſchon für alle Zifern geringerer Ordnung gröſsere ſubſtituirt werden z. B. Es iſt 234999 kleiner als 235231.

8. *Satz.*

Wird in einer Zahl für eine Zifer der pten Ordnung eine kleinere Zifer geſetzt, ſo wird hierdurch relativ die geringſte Verkleinerung der Zahl verurſacht, wenn man für die Zifern geringerer Ordnung die gröſste Zifer ſchreibt. (7. Satz).

9. *Satz.*

Wenn man aus einer Zahl durch Vergröſserung einer Zifer der pten Ordnung eine gröſsere machen will, ohne doch die Summe der Zifern zu verändern, ſo muſs man nach geſchehener Vergröſserung, mit Zifern eine Verklei-

 nerung

a) Abſolut genommen ſoll unter der geringſten Zifer, o verſtanden werden. Bei der Anwendung dieſer Sätze aber, wird es jedesmal von der Aufgabe abhängen, welchen Werth die geringſte Zifer haben ſoll. Dies letzte gilt auch von der höchſten Zifer.

nerung vornehmen, deren Ordnung **geringer** als die pte ist. Denn soll die Summe unverändert bleiben, so muss wegen der Vergrösserung der Zifer der pten Ordnung nothwendig mit einer oder mehrern der andern Zifern eine Verkleinerung vorgenommen werden. Hierzu darf man aber keine Zifer nehmen, welche eine höhere Ordnung hat als die vergrösserte, weil dadurch die ganze Zahl abnähme, folglich muss die Verkleinerung mit solchen Zifern geschehn, deren Ordnung geringer als die pte ist. (7. Satz).

10. *Satz.*

Um daher eine Zahl zu vergrössern ohne doch die Zifernsumme zu ändern, darf man keine Vergrösserung mit der Zifer der geringsten Ordnung vornehmen.

11. *Satz.*

Will man also aus einer Zahl, ohne die Zifernsumme zu verändern, die nächstgrössere machen nnd die letzte Zifer lässt noch eine Verkleinerung zu, so muss man die vorletzte um 1 vergrössern uud die letzte um 1 verkleinern.

12. *Satz.*

Wenn sich eine Zahl mit m gleichen Zifern endigt, die keine Verkleinerung mehr zulassen und es soll hieraus dadurch eine grössere Zahl der nämlichen Zifernsumme gemacht werden, dass man für eine Zifer eine grössere substituirt, so muss die Substitution für eine Zifer geschehn. die wenigstens m + 2 Stellen von der letzten Zifer entfernt ist. Denn nach geschehener Substitution muss wenigstens *eine* Zifer verkleinert werden; diese kann aber keine von den genannten m Zifern seyn, folglich muss sie von der Letzten an gerechnet wenigstens die m + 1te Stelle haben und daher ist klar, dass die vergrösserte wenigstens die m + 2te Zifer von der Letzten angerechnet seyn müsse. (9. Satz.)

13. *Satz.*

Wenn die letzten m gleichen Zifern keine Verkleinerung mehr zulassen, so erhält man die nächstgrössere der

der nämlichen Zifernſumme, wenn man die m + 2te, von der letzten Zifer angerechnet, um 1 vergröſsert und für alle Zifern geringerer Ordnung, die geringſte Zifer ſetzt, auſser der letzten für welche das Supplement zur Zifernſumme der gegebenen Zahl, geſetzt werden muſs. (10. Satz, 4. Satz, 5. Satz). Z. B. für 1235000 iſt die nächſtgröſsere Zahl der nämlichen Zifernſumme dieſe: 1240004.

14. *Satz.*

a) wenn eine Zahl gutgeordnet iſt und man vergröſsert ihre Zifer der *m*ten Ordnung um 1, ſo daſs ſie gleich p wird, ſo muſs man, wenn durch die geſchehene Vergröſserung der Zifer relativ die geringſte Vergröſserung der Zahl und zugleich eine gutgeordnete Zahl entſtehn ſoll, für alle Zifern deren Ordnung geringer als die mte iſt, p ſubſtituiren. Denn ſoll die Zahl eine gutgeordnete bleiben ſo dürfen der Zifer p nach der Rechten hin, keine kleinere Zifern folgen als p iſt, folglich iſt p die kleinſte welche für die Zifern ſubſtituirt werden kann, deren Ordnung geringer als die mte iſt, und daher giebt auch dieſe Subſtitution für die geſchehene Vergröſserung, die geringſte Zahl. Wird z. B. in der Zahl 2568 die Zifer 5 um 1 vergröſsert ſo iſt für dieſe Subſtitution die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl dieſe: 2666.

b) Wenn alſo die letzten *m* Zifern keine Vergröſserung mehr zulaſsen, ſo erhält man die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl, wenn man für die Zifer, welche von der letzten angerechnet, die m + 1te iſt, die nächſtgröſsere z ſetzt und dieſe z auch in die Stelle der letzten m Zifern ſchreibt. Läſst aber keine Zifer der Zahl eine Vergröſserung zu, ſo bekömmt man die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl, wenn man ihr 1 vorſchreibt und auch für jede der gedachten Zifern 1 ſetzt. Z. B. die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl für 129 iſt 133, für 1299 die Zahl 1333 und für 999 die Zahl 1111.

15. *Satz.*

Wenn eine gutgeordnete Zahl ſich mit m gleichen Zifern endigt und man vergröſsert die Zifer welche von der letzten angerechnet die m + 1te und um 1 kleiner als jede jener m Zifern iſt, um die Einheit, ſo muſs man alle übrige Zifern unverändert laſſen, wenn man für jene Subſtitution die geringſte Vergröſserung haben und zugleich eine gutgeordnete Zahl behalten will (14. Satz). Die Zifernſumme der hierdurch erhaltenen Zahl iſt um 1 gröſser als die Zifernſumme der Zahl, woraus ſie gemacht iſt.

16. *Satz.*

Iſt die Zifer der mten Ordnung einer gutgeordneten Zahl kleiner als die Zifern geringerer Ordnung und zwar wenigſtens um 2 kleiner als die letzte und man ſetzt für dieſe Zifer der *m*ten Ordnung die nächſtgröſsere p und ſchreibt für die zu ihrer Rechten befindlichen Zifern, ebenfalls p, ſo entſteht eine gutgeordnete gröſsere Zahl, deren Zifernſumme entweder ſo groſs oder kleiner als die Zifernſumme der gegebenen Zahl iſt.

17. *Satz.*

Aus einer gutgeordneten Zahl macht man die nächſtgröſsere gutgeordnete mit unveränderter Zifernſumme, wenn man erſtlich von der letzten an, die nächſte Zifer p aufſucht, welche wenigſtens um 2 kleiner iſt als dieſe letzte und hierauf für dieſe gefundene Zifer p die nächſtgröſsere q ſubſtituirt und dieſe q auch in die Stelle der Zifern ſetzt, welche auf p, nach der Rechten hin, folgen, die letzte ausgenommen, für die man das Supplement zur Zifernſumme ſetzen muſs. Denn deſto näher die Zifer p. welche man vergröſsert bei der letzten ſteht, um deſto weniger wird die Zahl vergröſsert (1. Satz). Iſt dieſe Vergröſserung vorgenommen und aus p, q geworden, ſo muſs für die folgenden wegen 14 Satz, auch q geſchrieben werden. Es muſs aber gedachte p wenigſtens um 2 kleiner ſeyn, als die letzte, weil durch das vor-

vorgeschriebene Verfahren, wenn sie nur um 1 grösser wäre, eine Zahl entstünde, deren Zifernsumme grösser wäre als die der gegebenen Zahl (15. Satz). Ist sie aber um 2 kleiner als die letzte, so entsteht durch die vorgeschriebene Substitution eine Zahl mit einer entweder eben so grossen oder mit einer kleinern Zifernsumme (16. Satz). Im ersten Falle ist sie dann die gesuchte Zahl und im zweiten Falle braucht nur die Summe auf die vorhingedachte Weise supplirt zu werden. Z. B. Für 23478 ist die nächstgrössere gutgeordnete mit der nämlichen Zifernsumme, die Zahl 23559.

Anmerkung.

Sollte bei einem bestimmten Falle das Supplement grösser werden als der Werth der höchsten Zifer beträgt, so muss das Supplement so unter die Zifern der geringsten Ordnung vertheilt werden, dass man von der letzten Zifer an, so viel zu einer jeden addirt, als sich nur immer zur letzten, vorletzten u. s. w. addiren lässt, ohne dass die Summe den Werth der höchsten Zifer übersteigt. Denn durch die Vertheilung des Supplements auf die vorgeschriebene Weise, wird die Summe vollständig und dadurch die Zahl am geringsten vergrössert, weil man mit der Vertheilung des Supplements bei der Zifer der geringsten Ordnung den Anfang macht, und jeder so viel davon giebt als sich ihnen nur immer geben lässt ohne den Werth der höchsten Zifer zu übersteigen. Auch erhellet, dass hierbei die Zahl gutgeordnet bleibt. Z, B. Es ist bei dem decadischen Systeme von 125556 die nächstgrössere gutgeordnete Zahl der nämlichen Zifernsumme, diese: 133359.

18. *Satz.*

Wenn die Zifern einer Zahl von der Linken nach der Rechten so auf einander folgen, dass allemal die kleinere auf die grössere folgt, so ist sie unter allen den Zahlen, die mit diesen Zifern geschrieben werden können, die grösste.

19. *Satz.*

Sind die Zifern einer Zahl gutgeordnet, ſo hat die Zahl unter allen denen, die ſich mit dieſen Zifern ſchreiben laſſen, den geringſten Werth.

20. *Satz.*

Sind die Zifern einer Zahl nicht, wie im 18ten Satze angegeben iſt, unter ſich geordnet, ſo läſst ſich mit den Zifern eine noch gröſsere Zahl ſchreiben, als die gegebene iſt.

21. *Satz.*

Eine Zahl kann durch ein bloſses Vertauſchen ihrer Zifern gegen einander vergröſsert werden, wenn ihre Zifern nämlich die Stellung unter ſich haben, daſs nicht allemal die kleinere auf die gröſsere folgt.

22. *Satz.*

Eine Zahl wird durch ein Umtauſchen ihrer Zifern gegen einander nur dann vergröſsert, wenn hierbei in die Stelle derjenigen Zifer eine gröſsere geſetzt wird, welche unter den umgetauſchten die höchſte Ordnung hat (5. Satz, 7. Satz).

23. *Satz.*

Wird eine Zahl durch Umtauſchen der Zifern vergröſsert, ſo wächſt ſie dadurch um deſto mehr, deſto höher die Ordnung der Zifer iſt, die unter den umgetauſchten die höchſte Ordnung hat. Will man daher eine Zahl durch Verwechſelung der Zifern ſo wenig als möglich vergröſsern, ſo muſs man ſich hierbei auf die Zifern der geringſten Ordnung einzuſchränken ſuchen. Wie viele dieſer Zifern hier erforderlich ſind, findet man offenbar, wenn man von der Rechten nach der Linken grade nur ſo viele Zifern abſchneidet, als hinreichend ſind um eine Zahl zu erhalten, die ſich durch das Vertauſchen ihrer Zifern vergröſsern läſst. (19. Satz, 20. Satz.)

24. *Satz.*

Hat man eine Zahl deren erste Zifer z kleiner ist als die nächstfolgende und es sind die Zifern welche auf die erste folgen so geordnet wie im 18ten Satze angenommen wurde, so macht man hieraus die nächstgröſsere Zahl, welche man durch eine bloſse Vertauschung der Zifern bekommen kann, wenn man für die erste z diejenige substituirt, welche unter den Zifern zu ihrer Rechten die nächstgröſsere ist und hierauf z nebst den übrigen nach dem 19 Satze geordnet, neben die substituirte schreibt. Denn ohne Vertauschung der ersten Zifer kann mit der Zahl durch bloſses Verwechseln der Zifern keine Vergröſserung vorgenommen werden, man muſs folglich nothwendig z gegen eine der Zifern umtauschen, die sich zu ihrer Rechten befinden. Hier darf aber nicht für z eine Zifer gesetzt werden, die ihr gleich oder gar kleiner als sie ist (22. Satz,) folglich muſs man für sie eine gröſsere substituiren. Da man nun bei dem vorgeschriebenen Verfahren für die Zifer z die setzt, welche unter den übrigen von ihr die nächstgröſsere ist und alle übrige Zifern der Zahl neben diese substituirte Zifer so geordnet schreibt daſs sie die kleinste Zahl bilden, die sich mit ihnen schreiben läſst (19. Satz), so ist einleuchtend, daſs dadurch die Zahl nicht nur vergröſsert wird, sondern daſs sie auch zugleich die geringste Vergröſserung erhält, welche durch bloſse Versetzung der Zifern erhalten werden kann.

25, *Satz.*

Will man eine Zahl Z durch Umtauschung der Zifern so wenig als möglich vergröſsern, so schneide man von der Linken nach der Rechten Zifern ab, die eine Zahl bilden, deren erste Zifer z zwar kleiner ist als die nächstfolgende, deren übrige Zifern aber so geordnet sind, daſs niemals die nächstfolgende gröſser ist als die nächstvorhergehende. Diesen Theil der Zahl Z vergröſsere man nach dem 24ten Satze und lasse alle übrige Zifern der Zahl Z unverändert stehn, Denn hier wird die Vergröſserung nach der Vorschrift des 23ten und 24ten Satzes zugleich vor-

vorgenommen, folglich so, dass die Zahl den möglichst kleinsten Wachsthum erhält, den sie durch blosses Vertauschen der Zifern bekommen kann.

Aufgaben mit gegebenen Zifern entweder alle Zahlen zu schreiben, die sich damit schreiben lassen, oder nur die welche unter bestimmten Einschränkungen damit geschrieben werden können.

§. 7.

Aufgabe.

Es sollen alle Zahlen geschrieben werden, die mit den Zifern 1, 2, 3, ... p geschrieben werden können, und zwar so, dass man von der kleinsten Zahl successiv zur grössten übergeht.

Auflösung.

1) Man schreibe die einzifrigen Zahlen, wie sie ihrer Grösse nach, unter sich folgen, neben einander.

2) Als die erste zweizifrige Zahl setze man 11 hin und leite hieraus die übrigen zweizifrigen Zahlen nach dem 4ten und 6ten Satze (§. 6.) her.

3) Man setze vor die erste zweizifrige Zahl die Zifer 1 und folgere hieraus wieder nach dem 4ten und 6ten Satze die andern dreizifrigen Zahlen.

4) Nach der nämlichen Vorschrift, wie man die dreizifrigen Zahlen aus den zweizifrigen abgeleitet hat, leite man die vierzifrigen aus den dreizifrigen, die fünfzifrigen aus den vierzifrigen u. s. f. ab.

Beweis.

Bei der Beobachtung der gegebenen Regeln schreibt man zuerst die einzifrigen Zahlen so hin, dass man von der kleinsten zur grössten geht und von dieser geht man dann successiv nach dem 6ten und 4ten Satze zu den andern Zahlen fort, so dass man also immer von einer Zahl zur nächstgrössern kömmt. Es werden also hierbei, gewiss die Zahlen so hingeschrieben, wie sie ihrer Grösse

nach

nach auf einander folgen, auch wird keine übergangen, weil das ſucceſsive Fortſchreiten von einer Zahl zur nächſtgröſsern dieſes nicht zuläſst.

Beiſpiele.

Es ſind die Zifern 1, 2, 3, 4, gegeben

1,	2,	3,	4,
11,	12,	13,	14,
21,	22,	23,	24,
31,	32,	33,	34,
41,	42,	43,	44,
111.	112,	113,	114,
121,	122,	123,	124,
131,	132,	133,	134,
141,	142,	143,	144.
211,	212,	213,	214,
221,	222,	223,	224,
231,	232,	233,	234,
241,	242,	243,	244,
311,	312,	313,	314,
"	"	"	"
341,	342,	343,	344,
411,	412,	413,	414,
"	"	"	"
441,	442,	443,	444,
1111,	1112,	1113,	1114,
u.	ſ.		w.

§. 8.

Aufgabe.

Alle gut geordnete Zahlen zu ſchreiben, die mit den Zifern 1, 2, 3...p, geſchrieben werden können, und zwar in der Ordnung, daſs allemal die kleinere Zahl früher als die gröſsere geſchrieben wird.

Auflöſung.

1, Man ſchreibe die einzifrigen Zahlen ſucceſsiv von der kleinſten Zahl 1 bis zur gröſsten p neben einander.

2.

2) Man setze die geringste zweizifrige Zahl 11 hin und leite hieraus nach dem 4ten Satze so viele andere her als hiernach geschehn kann. Hat man die höchste Zahl die sich hierdurch finden läst, so mache man aus dieser nach b) 14. Satze die nächstfolgende und wende auf diese wieder die Vorschrift des 4ten Satzes an und wenn dies nicht mehr angeht, so nehme man aufs neue den 14ten Satz b) zu Hülfe u. s. w. bis man zu der zweizifrigen Zahl kömmt, deren beide Zifern keine Vergröserung mehr zulasen.

3) Man schreibe vor die geringste zweizifrige Zahl die Zifer 1 und leite hieraus wieder die übrigen so dass man sich hierzu des 4ten und 14ten Satzes b) so bedient, wie es zu der Ableitung der zweizifrigen Zahlen aus der geringsten vorgeschrieben ist.

4) Auf dieselbe Weise wie die dreizifrigen aus den zweizifrigen abgeleitet werden, leitet man die vierzifrigen wieder aus den dreizifrigen, die fünfzifrigen aus den vierzifrigen ab u. s. w.

Beweis.

Da man zuerst die einzifrigen Zahlen ihrer Gröse nach neben einander schreibt, hierauf die geringste zweizifrige Zahl 11 hinsetzt und aus dieser nach dem 4ten und 14ten Satze b) alle übrige zweizifrige Zahlen herleitet und eben so aus der geringsten dreizifrigen Zahl 111 wieder die andern folgert und nach der nämlichen Regel die vierzifrigen, fünfzifrigen Zahlen u. s. f. darstellt, so ist einleuchtend, dass die gefundenen Zahlen wachsend fortlaufen, alle gutgeordnet sind und wegen des hiermit verbundenen Fortganges von der kleinern Zahl zur nächstgrösern gutgeordneten, keine übergangen werden kann. Da nun die gegebene Aufgabe dieses verlangt, so thut ihr auch die Auflösung völlig Genüge.

Bei-

Beispiel.

Es sind die Zifern 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben.

1,	2,	3,	4,	5,	6,
11,	12,	13,	14,	15,	16,
	22,	23,	24,	25,	26,
		33,	34,	35,	36,
			44,	45,	46,
				55,	56,
					66,
111,	112,	113,	114,	115,	116,
	122,	123,	124,	125,	126,
		133,	134,	135,	136,
			144,	145,	146,
				155,	156,
					166,
	222,	223,	224,	225,	226,
		233,	234,	235,	236,
			244,	245,	246,
				255,	256,
					266,
		333,	334,	335,	336,
			344,	345,	346,
				355,	356,
					366,
			444,	445,	446,
				455,	456,
					466,
				555,	556,
					566,
					666,
1111,	1112,	1113,	1114,	1115,	1116,

u. s. w.

§. 9.

Aufgabe.

Es ſollen mit 1, 2, 3 p, alle Zahlen, deren Ziffernſumme gleich p iſt, ſo geſchrieben werden, daſs man nach und nach von der kleinſten Zahl zur gröſsten kömmt.

Auflöſung.

Man ſuche zuerſt die einzifrigen, dann die zweizifrigen, hierauf die dreizifrigen Zahlen u. ſ. f. nach folgenden Regeln:

1) Man ſchreibe die Zahl p hin, dieſe iſt die einzige einzifrige Zahl, welche ſich hier denken läſst.

2) Aus dieſer erhält man die geringſte zweizifrige, indem man p um 1 vermindert und dieſer um 1 verminderten Zifer, 1 vorſetzt. Hieraus bekömmt man die zweite, wenn man die letzte Zifer um 1 verkleinert und die erſte um 1 vergröſsert. Auf die nämliche Weiſe erhält man aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte u. ſ. w. Die zweizifrige, deren letzte Zifer 1 iſt, iſt die gröſste zweizifrige Zahl.

3) Um die kleinſte dreizifrige Zahl zu erhalten, denke man ſich die zuletzt gefundene zweizifrige als eine dreizifrige, in deren höchſten Ziffernſtelle 0 ſteht und leite hieraus nach des §. 6. 13ten Satze die nächſtgröſsere Zahl her. Dieſe Zahl iſt die erſte dreizifrige. Aus dieſer leite man alsdann die zweite, aus der zweiten die dritte u. ſ. f. nach den Regeln des 12ten und 13ten Satzes des §. 6. ab. Die gröſste dreizifrige Zahl endigt ſich mit 2 Einſen.

4) So wie man die dreizifrigen aus den zweizifrigen Zahlen erhalten hat, bekömmt man auch die vierzifrigen aus den dreizifrigen, die fünfzifrigen aus den vierzifrigen, die ſechszifrigen aus den fünfzifrigen u. ſ. f.

1..

Die gröſste Zahl deren Zifernſumme p iſt, iſt eine Zahl mit p Zifern, deren eine jede 1 iſt.

Beweis.

Da man hier von der einzifrigen Zahl p zu den zweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen Zahlen u. ſ. w. nach den Regeln des 12ten und 13ten *Satzes* des §. 6. kömmt, ſo iſt einleuchtend, daſs in jeder Zahl die Summe der Zifern gleich p iſt, daſs man ferner ſucceſsiv von der kleinſten Zahl zur gröſsten übergeht und daſs aus dieſem Grunde auch keine hier denkbare Zahl übergangen wird.

Beiſpiele.

1)

6; 15, 24, 33, 42, 51; 114, 123, 132, 141, 213, 222, 231, 312, 321, 411; 1113, 1122, 1131, 1212, 1221, 1311, 2112, 2121, 2211, 3111; 11112, 11121, 11211, 12111, 21111; 111111.

2)

8; 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71; 116, 125, 134, 143, 152, 161, 215, 224, 233, 242, 251, 314, 323, 332, 341, 413, 422, 431, 512, 521, 611; 1115, 1124, 1133, 1142, 1151, 1214, 1223, 1232, 1241, 1313, 1322, 1331, 1412, 1421, 1511, 2114, 2123, 2132, 2141, 2213, 2222, 2231, 2312, 2321, 2411, 3113, 3122, 3131, 3212, 3221, 3311, 4112, 4121, 4211, 5111; 11114, 11123, 11132, 11141, 11213, 11222, 11231, 11312, 11321, 11411, 12113, 12122, 12131, 12212, 12221, 12311, 13112, 13121, 13211, 14111, 21113, 21122, 21131, 21212, 21221, 21311, 22112, 22121, 22211, 23111, 31112, 31121, 31211, 32111, 41111; 111113, 111122, 111131, 111212, 111221, 111311, 112112, 112121, 112211, 113111, 121112, 121121, 121211, 122111, 131111, 211112, 211121, 211211, 212111, 221111, 311111; 1111112, 1111121, 1111211, 1112111, 1121111, 1211111, 2111111; 11111111.

3)

4

13
22
31

112
121
211

1111

§. 10.

Aufgabe.

Mit den Zifern 1, 2, 3, ... p, alle gutgeordnete Zahlen zu ſchreiben, deren Zifernſumme gleich p iſt und zwar in der Ordnung, daſs man zuerſt die kleinſte Zahl hinſchreibt und von dieſer ſucceſsiv zu den gröſsern übergeht.

Auflöſung.

Man gehe von der einzifrigen Zahl ſucceſſiv zu den zweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen Zahlen u. ſ. w. nach folgenden Vorſchriften:

1) Es wird zuerſt die Zahl p hihgeſchrieben; dieſe iſt die einzige hier mögliche einzifrige Zahl.

2) Aus dieſer leitet man die erſte und geringſte zweizifrige Zahl her, indem man ſie um 1 vermindert und der hierdurch entſtandenen p — 1, die Zifer 1 vorſchreibt. Hieraus bekömmt man die nächſtfolgende, wenn man ihre zweite Zifer, alſo p — 1, um 1 verkleinert und ihre erſte Zifer, nämlich 1, um 1 vergröſsert. Auf die nämliche Weiſe bekömmt man aus der hierdurch erhaltenen zweizifrigen Zahl, die drit-

te

te zweizifrige und so überhaupt aus der nächstvorhergehenden die nächstfolgende. Kömmt man hierbei auf eine Zahl deren Zifern unter sich gleich sind oder bei der sich die erste Zifer nur um die Einheit von der letzten unterscheidet, so ist diese die letzte zweizifrige Zahl.

3) Um die erste dreizifrige Zahl zu bekommen, schreibt man der zuletzt erhaltenen zweizifrigen, o vor und leitet aus dieser nach dem 17ten Satze des §. 6. die nächstgrössere her; diese ist die erste und geringste dreizifrige Zahl. Aus dieser erhält man alsdenn, vermittelst des 17ten Satzes in §. 6. successiv alle folgende. Die dreizifrige Zahl ist die letzte und daher grösste, aus welcher durch den 17ten Satz des §. 6. keine grössere dreizifrige gemacht werden kann,

4) Aus den dreizifrigen Zahlen leitet man alsdenn auf die nämliche Weise die vierzifrigen, aus den vierzifrigen, die fünfzifrigen u. s. f. ab, wie die dreizifrigen aus den zweizifrigen abgeleitet werden.

Beweis.

Aus der einzifrigen Zahl findet man offenbar nach 2) alle gutgeordnete zweizifrige zur Zifernsumme p, denn man geht nach dieser Vorschrift successiv von der kleinsten zu den grössern über und bleibt bei der stehn, aus welcher keine gutgeordnete zweizifrige Zahl weiter abgeleitet werden kann. Da nun aus diesen nach den Regeln des 17ten Satzes in §. 6. alle dreizifrige, vierzifrige Zahlen u. s. w. hergeleitet werden, so ist einleuchtend, dass man durch die gegebene Auflösung alle gutgeordnete Zahlen zur Zifernsumme p erhält, und zugleich successiv von der kleinsten Zahl zur grössten kömmt, weil man von der kleinsten Zahl, nämlich von p ausgeht.

Beispiele.

1)	2)	3)
7	6	8
—	—	—
16	15	17
25	24	26
34	33	35
—	—	44
115	114	—
124	123	116
133	222	125
223	—	134
—	1113	224
1114	1122	233
1123	—	—
1222	11112	1115
—	—	1124
11113	111111	1133
11122		1223
—		2222
111112		—
—		11114
1111111		11123
		11222
		—
		111113
		111122
		—
		1111112
		—
		11111111

§. 11.

Aufgabe.

Es sollen alle Zahlen successiv von der kleinsten bis zur grössten geschrieben werden, die sich mit den Zifern 1, 2, 3, 4, ... p unter der Bedingung schreiben lassen, dass eine jede Zahl, **alle** diese gegebene Zifern, und keine öfter als **einmal** enthält.

Auf-

Auflöſung.

Man ſchreibe zuerſt die Ziffern gutgeordnet neben einander, dies giebt die erſte Zahl. Aus dieſer leite man nach der Vorſchrift des 25ten Satzes in §. 6. die zweite, aus dieſer zweiten, die dritte, aus der dritten die vierte her u. ſ. w. bis man auf eine Zahl kömmt, deren Ziffern ſo geordnet ſind, daſs allemal die kleinere auf die gröſsere folgt. Dieſe Zahl iſt die letzte und gröſste.

Beweis.

Die erſte Zahl welche man hinſchreibt iſt die kleinſte (§. 2, 19 Satz). Da nun hieraus nach dem 25ten Satze des §. 6. ſucceſſiv die gröſsern hergeleitet werden, ſo iſt klar, daſs die Auflöſung der Aufgabe völlig entſpricht. Daſs die Zahl hier die gröſste iſt, deren Ziffern umgekehrt gutgeordnet ſind folgt aus §. 6, 18. Satz.

Beiſpiel.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Zweiter Abſchnitt.

Combinationslehre.

1) Von den Complexionen überhaupt.

§. 12.

1. *Erklärung.*

Mehrere neben einander geſtellte Dinge in irgend einer Verbindung gedacht, machen eine Complexion. Eine ſolche wäre z. B. *bcfgh*, wo man ſich unter den Buchſtaben denken mag, was man will, alſo auch Zahlen. (In der Folge kann bloſs von Buchſtaben- und Zahlencomplexionen die Rede ſeyn). Die gegebenen Dinge woraus die Complexion zuſammengeſetzt wird, heiſsen Elemente. *a*). Kommen in einer Complexion mehrere identiſche

a) Bedeuten die Elemente Zahlen, ſo muſs, bei dem Gebrauche der Complexionen in der Arithmetik, beſtimmt werden, in welcher Verbindung ihre Elemente zu nehmen ſind. Es kann z. B. ab in arithmetiſcher Verbindung, $a+b$, $a-b$, $a.b$, $a:b$, a^b, $\sqrt[a]{b}$ u. ſ. w. ſeyn.

tische Elemente neben einander gestellt vor, wie z. B. in *aaaabf*, so ist es oft sehr nützlich, für die Complexion, welche diese Elemente für sich bilden, ein einziges derselben mit einer Zahl oben zur Rechten zu schreiben, die mit ihrer Anzahl übereinstimmt. Auf diese Weise schreibt man die eben gedachte Complexion so: a^4bf. Die Zahl welche hier die Menge der identischen Elemente anzeigt, heifst der Wiederholungsexponent. *b*)

2. *Erklärung.*

Complexionen einerlei Art sind solche, die aus einer gleichen Anzahl von Elementen bestehn und die übrigens die Relation unter einander haben, dafs in dem Falle, wenn in der einen, verschiedene Elemente mehreremal vorkommen, in der andern auch so viele verschiedene Elemente relativ eben so oft vorkommen müfsen, Also *aab* und *ccd* sind Complexionen einerlei Art, wie auch *aabcdb* und *beegff*, nicht aber *cbbd* und *fggg*, weil nämlich in der ersten *b* zweimal vorkömmt, aber nicht auch in der zweiten sich ein Buchstabe zweimal befindet, denn *f* ist darinn einmal und *g* dreimal vorhanden.

3. *Erklärung.*

Complexionen sind unter sich ähnlich, wenn sie sich durch weiter nichts als durch ihre Ordnung von einander unterscheiden. Z. B. *abffg* und *afgfb*. Unähnlich sind sie hingegen wenn sie nicht blofs durch die Ordnung ihrer Elemente von einander verschieden sind.

b) Werden die Elemente, in einer Complexion bei der ein Wiederholungsexponent vorkömmt, als Zahlen angesehn und durch die Multiplication verbunden gedacht, so verwandelt sich der Wiederholungsexponent in einen Potenzexponenten.

4. *Erklärung.*

Eine Complexion ist gutgeordnet, wenn bei Zahlen die Elemente von der Linken nach der Rechten so auf einander folgen, dass nie eine grössere Zifer vor einer kleinern ist, und wenn bei Buchstaben nie ein späterer Buchstabe des Alphabets vor einem frühern steht, sondern umgekehrt wenn sich jedesmal der frühere Buchstabe vor dem spätern befindet. Es sind also 1368, *bfhm* gutgeordnete, hingegen 5273, *facb* sind schlechtgeordnete Complexionen. *a*)

5. *Erklärung,*

Den Complexionen kommen nach ihren Anfangselementen verschiedene Ordnungen zu. So ist *abfghm* eine Complexion der Ordnung *a*, der Ordnung *ab*, der Ordnung *abf* u. s. f. Hiernach kann die Ordnung einbuchstabig, zweibuchstabig, dreibuchstabig u. s. f. seyn.

6. *Erklärung.*

Wenn eine Complexion einer gewissen Bedingung nicht entspricht, so heisst sie in dieser Rücksicht eine unnütze Complexion, im entgegengesetzten Falle eine brauchbare. *b*)

7. *Erklärung.*

Die Complexionen bekommen die Namen Binionen, Ternionen, Quaternionen, Quinionen, Senionen, u. s. w. Ntionen, nachdem sie aus zwei, drei, vier, fünf, sechs und überhaupt n Elementen bestehn.

a) Die gutgeordnete Complexion ist gleichsam der Stellvertreter aller ihr ähnlichen Complexionen.

b) Sollen z. B. mit r, o, m, a, alle vierbuchstabige Complexionen geschrieben werden, die als Wörter der lateinischen Sprache einen bestimmten Sinn haben, so sind die Complexionen Roma, amor, armo, Maro, mora, oram, ramo brauchbare, die übrigen 17 vierbuchstabigen Complexionen aber, die sich ausser den geschriebenen, mit den gegebenen Buchstaben schreiben lassen, unnütze.

stehn. Hiernach nennt man auch die einzelnen Buchstaben und Zahlen, woraus die Complexionen gebildet werden, Unionen, und wenn von den Complexionen gesprochen wird, die für eine gewisse Anzahl von Dingen statt finden, so zählt man die Unionen mit.

8. *Erklärung.*

Die Complexionen werden zur ersten, zweiten dritten und überhaupt nten Klasse gerechnet, nachdem sie Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen u. s. w. Ntionen sind, und heissen alsdenn Species der Klasse wozu sie gehören. Die Unionen machen also die erste, die Binionen die zweite, die Ternionen die dritte und so im allgemeinen die Ntionen die nte Klasse aus. Einer jeden Klasse kömmt ein Exponent zu, nämlich die Zahl ist ihr Exponent, welche sagt, die wievielste Klasse sie ist. Die Klassen werden mit lateinischen grossen Buchstaben, nämlichdie erste mit A, die zweite mit B, die dritte mit C, und s. w, die nte mit $\mathfrak{N}$, bezeichnet. In einigen Fällen wird hierzu die gradestehende in andern aber die schiefstehende Schrift gewählt. In der Folge wird dieses näher bestimmt werden. Bisweilen bestimmt man aber auch eine Klasse dadurch dass man angiebt, die wievielste vorhergehende oder folgende sie von einer gewissen bestimmten ist, und bezeichnet diess auf die Weise, dass man über das gewöhnliche Zeichen der Klasse durch welche die andere bestimmt werden soll, eine Zahl schreibt, die durch ihr Zeichen — oder + sagt ob die zubezeichnende Klasse vorhergeht oder folgt und die durch ihre Grösse anzeigt, die wievielste vorhergehende oder folgende sie ist. So z. B. bedeuten $\overset{-3}{F}$ und C, ferner $\overset{+2}{F}$ und H einerlei. $\overset{0}{F}$ ist mit F gleichgültig. Diese Zahlen heissen Distanzexponenten. *a)*

9. *Er-*

a) Die Distanzexponenten können nicht nur hier sondern auch in

9. *Erklärung.*

Eine Klaſſe iſt gutgeordnet, wenn ihre Zahlencomplexionen, als Zahlen angeſehn, wachſend fortlaufen und wenn ihre Buchſtabencomplexionen, als Wörter eines Lexicons betrachtet, ſo auf einander folgen, daſs nie ein ſpäteres Wort vor einem frühern ſteht.

10. *Erklärung.*

Wenn ſich Zahlen — und Buchſtabenelemente au einander beziehn, ſo ſchreibt man, wenn dieſes angezeigt werden ſoll, entweder über oder unter die Buchſtaben die ſich darauf beziehenden Zahlen und ſchlieſst die beiden Zeilen in Klammern ein. Bezögen ſich z. B. die Zahlen 1, 2, 3, 4, u. ſ. w. in der Ordnung wie ſie genannt ſind auf a, b, c, d, u. ſ. f. ſo zeigte dies die Figur $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4.. \\ a, b, c, d.. \end{pmatrix}$ oder auch $\begin{pmatrix} a, b, c, d... \\ 1, 2, 3, 4... \end{pmatrix}$ an. Dieſe Figur heiſst der Zeiger und vermittelſt ſeiner iſt mann im Stande ſogleich Buchſtabencomplexionen in Zahlencomplexionen und ſo umgekehrt zu verwandeln.

2. Von den Involutionen und Evolutionen überhaupt.

§. 13.

1. *Erklärung.*

Wenn in der Arithmetik die Glieder einer Reihe nach einem bekannten Geſetze durch einander beſtimmt werden, ſo macht es keine Schwierigkeit jedes einzelne Glied anzugeben, ſobald man ſucceſſiv von dem erſten zu den folgenden fortgeht; anders verhält es ſich aber, wenn man

in andern Fällen mit Nutzen gebraucht werden, z. B. bei auf einander folgenden Werthen und Gliedern.

man auſser der Ordnung ſogleich irgend ein verlangtes angeben ſoll. Man bedient ſich hierzu eines allgemeinen Gliedes, aber um dieſes zu erhalten iſt es nothwendig wenigſtens zuvor, bloſs zur Vorbereitung, einige der erſten Glieder zu entwickeln, ſo daſs man alſo nicht unmittelbar mit der Conſtruction des allgemeinen Gliedes anfangen kann. Iſt es gefunden ſo müſsen die einzelnen beſtimmten Glieder aus ihm durch Subſtitutionen entwickelt werden, die oft ſehr mühſam und ſchwierig ſind und häufig enthält die allgemeine Formel für das Glied das man ſucht viel überflüſſiges. Die Combinationslehre kennt aber ein Verfahren, das Verlangte ohne Umwege, durch eine bloſse Anordnung der gegebenen Elemente zu Complexionen ſo darzuſtellen, daſs in dem Ausdrucke nichts überflüſsiges iſt und daſs dieſer zugleich auf das deutlichſte alles Vorhergehende ſo vor Augen ſtellt, daſs man gleich bei dem erſten Blicke die Verbindung des Vorhergehenden mit dem Folgenden wahrnimmt und daſs man im Stande iſt durch ein bloſses Ziehn von graden, vertikalen und horizontalen Linien, das Vorhergehende von dem Folgenden abzuſondern. Ein ſolches Verfahren wird **Involution** genannt, weil das dadurch Erhaltene nicht nur das Verlangte darſtellt, ſondern auch zugleich **das** involvirt enthält, was der Ordnung nach, dem Verlangten vorhergeht. Sehr häufig nennt man aber auch den durch die Involution entſtandenen Ausdruck ſelbſt, **Involution.** *a)*

Wird z. B. verlangt, daſs man alle gutgeordnete Zahlen angeben ſoll, die ſich mit den Zifern 1, 2, 3, 4 ſchreiben laſſen, ſo daſs die Zifernſumme jeder Zahl gleich 4 iſt, ſo iſt die Darſtellung

1	1	1	1,
1	1	2	
1	3		
2	2		
4			

zu der

a) Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik. Erſter Band, erſtes Heft, pag. 13.

der man durch ein bloſses Anordnen der Elemente kömmt eine Involution; denn ſie giebt die geſuchten Zahlen 1111, 112, 13, 22, 4, ſie hat auch nichts überflüſſiges und enthält zugleich alle gutgeordnete Zahlen zu den vorhergehenden Summen, nämlich zur Summe 1 für die Zifer 1, zur Summe 2 für die Zifern 1, 2, zur Summe 3 für die Zifern 1, 2, 3 und zwar ſo, daſs dieſe durch ein bloſses Ziehn von Horizontal- und Vertikallinien von einander getrennt werden können, wie man aus der Figur deutlich ſieht. Dieſes Abſondern heiſst Evolviren. Die gedachten Linien pflegt man gewöhnlich ſchon bei der Conſtruction der Involution zu ziehn.

Eine andere Involution für die nämliche Aufgabe iſt

4,

1|3

—

22

—

1|12

—

1|111

denn es fällt deutlich in die Augen, daſs in dieſem Ausdrucke, auſser den gutgeordneten Zahlen zur Summe 4 noch die gutgeordneten zur Summe 3, 2 und 1 vorkommen und daſs dieſe ſehr leicht durch ein Linienziehn zu evolviren ſind, auch iſt klar, daſs er nichts beſitzt, das nicht nothwendig zu dem Geſuchten gehört. Allein bei dieſer Involution iſt die Evolution nicht ſo einfach wie bei der vorigen, denn es kann z. B. hier nicht wie dort die Abſonderung aller gutgeordneten Zahlen zur Summe 3 auf einmal geſchehn, ſondern man iſt hier genöthigt erſt die einzifrige Zahl für ſich zu evolviren, dann die zweizifrige und hierauf die dreizifrige. Der Grund hievon liegt darinn, daſs man bei dieſer Darſtellung nicht vom Geringern zum Gröſsern übergeht.

Nennt man die Involution nur eine vollſtändige, welche alle Eigenſchaften der erſten hat, ſo ſind die Erforderniſſe einer vollſtändigen Involution dieſe:

1) Dafs ſie alles nothwendige aber auch nichts enthält was nicht als Theil des Geſuchten anzuſehn iſt.

2) Dafs ſie alles beſitzt, was der Ordnung nach dem Geſuchten vorhergeht.

3) Dafs bei ihr der Fortgang von dem Vorhergehenden zum Folgenden ſo offen ſteht, dafs dieſes nach einem beſtimmten unveränderlichen Geſetze durch ein bloſses Hinzufügen neuer Elemente geſchehn kann.

4) Dafs ſich bei ihr das der Ordnung nach Vorhergehende von dem Folgenden auf eine einfache Weiſe auf einmal abſondern läſst.

Willkührlicher Satz.

Das Zeichen für Involution überhaupt iſt: J. Es iſt aber die Form dieſes Buchſtabens nach den verſchiedenen Involutionen, verſchieden. Dies wird in der Folge beſtimmt werden.

1. *Anmerkung.*

Es iſt Involution immer nur relativ zu verſtehn, den es kann eine Darſtellung in einer Hinſicht eine involutoriſche in einer andern aber wieder nicht ſeyn.

2. *Anmerkung.*

Es laſſen ſich auch Involutionen denken bei welchen die Theile von dem Ganzen durch Ebenen abzuſondern ſind. Eine ſolche könnte man eine körperliche und daher die, bei welcher das evolviren durch Linien geſchieht, eine ebene Involution nennen. *a*).

3)

a) Quod ipſas involutiones attinet, cum hucusque prolatae, ſint planae, quae in longum et latum extenduntur, mento con-

3. Von den Verſetzungen.

§. 14.

1. *Erklärung.*

Gegebene Dinge auf alle mögliche Weiſe **verſetzen**, heiſst alle unter ſich **ähnliche** Complexionen (§. 12, 3. Erkl.) darſtellen, deren eine jede alle gegebene Elemente enthält und auſser dieſen weiter keine beſitzt. Eine jede der dargeſtellten Complexionen wird eine **Verſetzung** genannt.

2. *Erklärung.*

Die Zahl welche ſagt, **wie viele** Verſetzungen einer gegebenen Anzahl von Dingen zukommen, heiſst die **Verſetzungszahl.**

Willkührlicher Satz.

Will man anzeigen, daſs für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1, 2, 3, 4 \ldots\\ a, b, c, d \ldots\end{matrix}\right)$ die Verſetzungen der Buchſtaben oder Zahlenreihe gefunden werden ſollen, oder auch, daſs man ſich ſchon die Verſetzungen derſelben denkt, ſo bedient man ſich des Zeichens: $P \left(\begin{matrix}1, 2, 3, 4 \ldots\\ a, b, c, d \ldots\end{matrix}\right)$, wo P, Permutatio bedeutet. Kommen mehrere der nämlichen Elemente vor, ſo bedient man ſich häufig der Wiederholungsexponenten und ſchreibt daher z. B. ſtatt $P \left(\begin{matrix}1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3,\\ a, a, a, b, b, c, c, c, c\end{matrix}\right)$ dieſes: $P \left(\begin{matrix}1, 2, 3,\\ a^3, b^2 c^4\end{matrix}\right)$.

§. 15.

cipi poſſunt etiam involutiones ſolidae, ſive trium dimenſionum: ſic ut partes ad certum ſinem conjungendae ſitae ſint omnes in plani alicujus vel horizontalis vel verticalis vel diagonalis interſectione, ſive eae etiam ſolidum tali plano terminatum compleant. (Disquiſitiones analyticae, auctore Pfaff. Vol. I. p. 273).

§. 15.

Aufgabe.

Es sollen alle mögliche Versetzungen für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ \pi}{a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ p}$. gefunden werden.

1)

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

Man schreibe zuerst die Complexion $1234\ldots\pi$ und leite daraus die übrigen Complexionen her, wie man nach §. 11. aus der kleinsten Zahl alle übrigen erhält. Diese Complexionen sind alle Versetzungen der gegebenen Zahlen. Setzt man hierinn für die Zahlenelemente die mit ihnen correspondirenden Buchstaben, so bekömmt man alle verlangte Buchstabenversetzungen.

Beweis.

Schreibt man alle mögliche Zahlen, welche nach der Aufgabe des §. 11. mit $1, 2, 3, 4\ldots\pi$ geschrieben werden können, so hat man gewiss alle verlangte Zahlencomplexionen; denn fehlte irgend eine Complexion, so gäbe diese eine Zahl, die sich durch die Auflösung der Aufgabe des §. 11. nicht finden liesse, welches doch nicht der Fall seyn kann. Dass man alle Buchstabencomplexionen erhält, wenn man in den Zahlenversetzungen für die einzelnen Elemente die damit correspondirenden Buchstaben setzt, ist an sich klar.

Anmerkung.

Um die Buchstabenversetzungen zu bekommen ist nicht nothwendig, dass man vorher die Zahlenversetzungen aufsucht, denn man kann sie als Zahlen betrachten und um sich dieses zu erleichtern den Buchstaben einen

geringern oder gröſsern Werth geben, nachdem ſie im Alphabete früher oder ſpäter vorkommen.

Beiſpiel.

Die Verſetzungen von a, b, c, d, ſind:

1) abcd	2) bacd	3) cabd	3) dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Anmerkung.

Die erſte Verſetzungscolumne enthält die Complexionen der Ordnung a; die zweite die der Ordnung b; die dritte die der Ordnung c; die vierte die der Ordnung d (§. 12, 5. Erkl.). Ein Beiſpiel für Zahlencomplexionen enthält §. 11.

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

Es mag hier der Zeiger dieſer ſeyn; $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4}{a,\ b,\ c,\ d}$.

1) Man ſetze die höchſte Zifer 4 hin und ſchreibe vor dieſe die Zifer 3; hierauf tauſche man 3 gegen 4 um und ſetze die ſo erhaltene Binion unter die zuerſt gefundene. Dies giebt die Verſetzungen von 3 und 4.

2) Um die Verſetzungen von 2, 3 und 4 zu erhalten, ſetze man zuerſt jeder der beiden Binionen 2 vor, ſo hat man die Verſetzungen der Ordnung 2. Hieraus leite man die Verſetzungen der Ordnung 3 und aus dieſen wieder die der Ordnung 4 her, indem man in den Ternionen der Ordnung 2, von der erſten bis

zur

zur letzten, die Zifern 2 und 3 und in den Ternionen der Ordnung 3 eben ſo die Zifern 3 und 4 gegen einander umtauſcht. Dieſe Ternionen, die man durch die Umtauſchung zweier Zifern erhalten hat, ſchreibe man in der Ordnung wie man ſie findet, unter einander, unter die letzte der Ternionen der Ordnung 2.

3) Aus dieſen Verſetzungen der Elemente 2, 3, 4 mache man folgendermaſsen die verlangten Verſetzungen der vier Elemente 1, 2, 3, 4;

Man ſchreibe zuerſt den ſämmtlichen Ternionen 1 vor, ſo hat man die Verſetzungen der Ordnung 1. In dieſen, von der erſten bis zur letzten, vertauſche man 1 und 2 gegeneinander, ſo bekömmt man die Verſetzungen der Ordnung 2. Hieraus leite man auf ähnliche Weiſe die Verſetzungen der Ordnung 3 und aus dieſen wieder die Verſetzungen der Ordnung 4 her. Wegen der Stellung die dieſe Quaternionen unter ſich haben müſsen, hat man die Vorſchrift zu beobachten, daſs man die erſte der Ordnung 2 unter die letzte der Ordnung 1 ſchreiben und die übrigen, unter dieſer ſo auf einander folgen laſſen muſs, wie man ſie nach der gegebenen Vorſchrift findet.

Die hierhergehörige Figur iſt für die Verſetzungen der Elemente 1, 2, 3, 4, bis zu den Quaternionen der Ordnung 2 entwickelt, dieſe:

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2
2	1	3	4

u. ſ. w.

Beweis.

Hat man die Verſetzungen der *m* Elemente b, c, d, e..., p, ſo findet man daraus alle die Verſetzungen der m + 1 Elemente, a, b, c, d, e ... p, welche ſich mit *a* anfangen, wenn man einer jeden jener Mtionen, *a* vorſchreibt, weil ſich hier nur ſo oft eine verſchiedene M + 1 tion der Ordnung *a* denken läſst, als ſich die m Elemente b, c, d, e ...p verſchiedentlich geordnet neben *a* denken laſſen. Vertauſcht man in dieſen, *b* und *a* gegen einander, ſo erhält man lauter M + 1 tionen der Ordnung b und dieſe ſind auch alle hier denkbare, denn es können nur ſo viele von der Ordnung b gedacht werden, als ſich die *m* Elemente a, c, d, e ... p auf verſchiedene Weiſe neben *b* ſchreiben laſſen, alſo wieder ſo viele, als *m* verſchiedene Elemente Verſetzungen geben. Eben ſo erhellet, daſs man hieraus alle M + 1 tionen der Ordnung *c* macht, wenn man in ihnen *c* gegen *b* und *b* gegen *c* umtauſcht. Setzt man nun dieſe Operation ſo lange fort bis man alle M + 1 tionen der Ordnungen a, b, c, ... p bekommen hat, ſo bekömmt man auch gewiſs alle Verſetzungen der m + 1 Dinge a, b, c, d...p, weil dieſe nur M + 1 tionen der Ordnungen a, b, c, d...p ſeyn können. Hat man alſo alle Verſetzungen von *m* verſchiedenen Dingen und es kömmt noch ein von jenen verſchiedenes m + 1 tes hinzu, ſo laſsen ſich auf die angegebene Weiſe aus jenen Verſetzungen leicht die Verſetzungen dieſer m + 1 Elemente angeben.

Da nun die gegebene Auflöſung dieſe Regel vorſchreibt um aus 34, 43, (den einzig möglichen beiden Verſetzungen der Elemente 3, 4), alle Permutationen der drei Elemente 2, 3, 4 und aus dieſen wieder alle Verſetzungen der vier Elemente 1, 2, 3, 4 zu erhalten, ſo leidet ihre Richtigkeit keinen Zweifel und zugleich erhellet, daſs ſich ihre Vorſchrift auf ſo viele Elemente ausdehnen läſst, als nur immer gegeben werden.

1. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöſung giebt für die Verſetzungen eine vollſtändige Involution, wie ſogleich der erſte Blick auf die vorige und hierunterſtehende Figur lehrt.

a	b	c	d
a	b	d	c
a	c	b	d
a	c	d	b
a	d	b	c
a	d	c	b
b	a	c	d
b	a	d	c
"	"	"	"

Denn ſie enthält nichts überflüſsiges, es laſsen ſich auch bei ihr durch bloſses Linienziehn, die Verſetzun- von einem Elemente, von zweien, dreien Elementen u. ſ. w. völlig auf einmal abſondern, auch liegt bei ihr der Fortgang von den Verſetzungen von *m* Elementen zu den Verſetzungen von $m + 1$ Elementen, durch ein bloſses Hinzufügen mehrerer Elemente nach einem beſtimmten unveränderlichen Geſetze, ſehr deutlich vor Augen.

2. *Anmerkung.*

Die Zahlenverſetzungen welche man durch die beiden Auflöſungen erhält, laufen wie wachſende Zahlen und die Buchſtabenverſetzungen gehn lexicographiſch fort, d. h. wenn man dieſe Buchſtabencomplexionen als Wörter eines Lexicons betrachtete, ſo würden ſie hierinn in der Ordnung auf einander ſolgen müſsen, wie ſie die Auflöſung gegeben hat.

3. *Anmerkung.*

Nach der ersten Auflösung werden immer Complexionen aus Complexionen, jede nächstfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden abgeleitet. Bei der zweiten Auflösung werden Ordnungen aus Ordnungen, nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden gefolgert. Für die Darstellung der Complexionen aus Complexionen, läſst sich leicht eine rein combinatorische Vorschrift geben, wie auch §. 19. geschehn ist. *a*).

4. *Anmerkung.*

Die Anordnung der Complexionen nach der zweiten Auflösung giebt eine Vertikalcolumne; es lassen sich aber leicht die Vorschriften der Auflösung dahin abändern, daſs die Complexionen eine Horizontalcolumne geben, wie man aus der hierunterstehenden Figur deutlich sieht.

d \| c \| d b c b \|	d c d a c a	d b d a b a	c b c a b a
c d \| b d b c \|	c d a d a c	b d a d a b	b c a c a b
b b c c d d \|	a a c c d d	a a b b d d	a a b b c c
a a a a a a	b b b b b b	c c c c c c	d d d d d d

Es werden aber bei dieser die Complexionen von unten nach oben gelesen, wie z. B. die erste Complexion *abcd*.

Diese Anmerkung bezieht sich auch auf die vertikalen Anordnungen bei den übrigen combinatorischen Operationen.

5. *An-*

a) Der polynomische Lehrsatz, herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg. pag. 163. Hier ist bei dieser rein combinatorischen Auflösung erinnert, daſs zwar bei den Versetzungen die Regel Complexionen aus Complexionen herzuleiten rein combinatorisch gegeben werden könne, nicht aber immer bei andern combinatorischen Operationen, daſs sich aber das Ableiten der Ordnungen aus Ordnungen durchgängig rein combinatorisch lehren lasse.

5. *Anmerkung.*

Sowohl nach der ersten als zweiten Auflösung erhält man die Versetzungen der m + 1 Elemente a, b, c, d . . . p, indem man zuerst die Versetzungen der Ordnung *a*, dann die der Ordnung *b*, hierauf die der Ordnung *c* findet u. s. w. Aus dem Beweise der rein combinatorischen Auflösung erhellet zugleich, dass es bei m + 1 verschiedenen Elementen so viele Versetzungen der Ordnung *a*, der Ordnung *b*, der Ordnung *c* u. s. w. giebt als sich *m* Dinge versetzen lassen.

§. 16.

Lehrsatz.

Die Versetzungszahl (§. 14, 2. Erkl.) ist für *n* verschiedene Elemente gleich 1. 2. 3. 4. . . . n.

Beweis.

Wenn man mehrere unter sich verschiedene Elemente versetzt, so erhält man Versetzungen von so vielen verschiedenen Ordnungen, als Elemente zu versetzen gegeben sind, auch kömmt die eine Ordnung so oft vor als jede andere, weil man bei *n* Elementen so viele Complexionen jeder Ordnung erhält als sich n — 1 Elemente versetzen lassen (§ 15, 5. Anmerk.) Hieraus folgt: zwei Elemente geben Versetzungen von zweien verschiedenen Ordnungen, eine jede Ordnung kömmt einmal vor, folglich hat man bei zwei Elementen überhaupt zwei Versetzungen. Drei Elemente geben Versetzungen von drei verschiedenen Ordnungen, von jeder Ordnung giebt es 2 Complexionen, folglich lassen auch drei Elemente 3 . 2. Versetzungen zu. Bei vier Elementen erhält man Versetzungen von vier verschiedenen Ordnungen, eine jede dieser Ordnungen kömmt aber hier so oft vor als sich drei Elemente versetzen lassen, folglich 3 . 2 mal und daher lassen sich vier Elemente auch 4 . 3 . 2 mal versetzen.

 Hier-

Hieraus erhellet schon hinreichend, dass n verschiedene Elemente, 1.2.3.4....n Versetzungen geben müssen.

Zusatz.

Es ist also die Versetzungszahl für zwei verschiedene Elemente gleich 2, für drei gleich 6, für vier gleich 24, für fünf gleich 120 u. s. w.

§. 17.

Aufgabe.

Es soll die 302te Versetzung der 6 Elemente a, b, c, d, e, f aufgesucht werden, die man finden würde, wenn man sie nach einer der beiden gegebenen Auflösungen bestimmte.

Auflösung. a).

Die gesuchte Complexion muss zu irgend einer einbuchstabigen, zweibuchstabigen, dreibuchstabigen Ordnung u. s. w. gehören, welche für die gegebenen Elemente statt findet (§. 12, 5. Erkl.) Man untersuche daher zuerst zu welcher einbuchstabigen, dann zu welcher zweibuchstabigen, hierauf zu welcher dreibuchstabigen Ordnung sie gehört u. s. w. auf folgende Weise:

1) Da sich 5 Elemente 120mal versetzen lassen, so kömmt eine jede Ordnung der gegebenen 6 Elemente auch 120mal vor. Es ist daher

die 1te Versetzung bis zur 120ten, von der Ordnung a
— 121te ——— — — 240ten, — — ——— b
— 241te ——— — — 360ten, — — ——— c

Es hat also die 302te gewiss die Ordnung c.

2)

a) Man muss hierbei vor Augen haben, dass nach den beiden Auflösungen der Aufgabe des §. 15, die Buchstabenversetzungen lexicographisch und die Zahlenversetzungen wie wachsende Zahlen fortlaufen und dass daher auch bei jenen die Ordnungen lexicographisch und bei diesen wie wachsende Zahlen fortgehn müssen.

2) Vier Elementen kommen 24 Versetzungen zu, daher kömmt auch bei 6 Elementen eine jede zweibuchstabige Ordnung 24mal vor. Unter den zweibuchstabigen die sich mit *c* anfangen ist aber *ca* die erste, folglich ist auch

die 241te Versetzung bis zur 264ten, von der Ordnung ca
— 265te ——— — — 288ten, — — ——— cb
— 289te ——— — — 312ten, — — ——— cd

Es hat daher die 302te die Ordnung cd.

3) Drei Elemente lassen sich 6 mal versetzen, folglich findet auch bei 6 Elementen jede dreibuchstabige Ordnung 6 mal stat. Da nun unter den dreibuchstabigen, die sich mit *cd* anfangen, *cda* die erste ist, so ist auch

die 289te Versetzung bis zur 294ten, von der Ordnung cda
— 295te ——— — — 300ten, — — ——— cdb
— 301te ——— — — 306ten, — — ——— cde

Die 302te hat also die Ordnung *cde*.

4) Zwei Elemente sind nur zweier Versetzungen fähig, daher läßt sich auch hier jede vierbuchstabige Ordnung nur 2mal denken, folglich da unter denen, die sich mit *cde* anfangen, hier *cdea* die erste ist, so ist auch

die 301te Versetzung bis zur 302ten von der Ordnung cdea.

Es hat also die 302te die Ordnung cdea.

5) Da bei 6 Elementen jede fünfbuchstabige Ordnung nur einmal denkbar ist, und unter denen, die sich mit c d e a anfangen, hier c d e a b die erste ist, so ist auch

die 301te Versetzung von der Ordnung cdeab, also
— 302te ——— — — ——— cdeaf und aus
diesem Grunde ist die gesuchte 302te Versetzung die Complexion cdeafb.

§. 18.

Aufgabe.

Es wird gefragt, die wievielste Versetzung der Elemente a, b, c, d, e, f die Complexion *cdeafb* ist.

Auflösung.

Man bestimme zuerst die wievielste die erste und letzte Versetzung der Ordnung *c* ist. Hierauf untersuche man die wievielste die erste und letzte Complexion der Ordnung *cd* sey u. s. w. Jede dieser Untersuchungen führt auf zwei Zahlen, wovon die eine sagt die wievielste Complexion die gegebene **wenigstens** und die wievielste sie **höchstens** sey und diese zwei Zahlen nähern sich immer mehr und mehr desto weiter die Untersuchung fortgesetzt wird, so dass sie am Ende zusammenfallen. Folgendes wird dies erklären:

1) Es giebt hier von jeder einbuchstabigen Ordnung 120 Complexionen, folglich ist

Die 1te Versetzung bis zur 120ten, von der Ordnung a
— 121te ——— — — 240ten, — — ——— b
— 241te ——— — — 360ten, — — ——— c

Die gegebene Versetzung ist also wegen ihrer Ordnung *c*, wenigstens die 241te und höchstens die 360te.

2) Von jeder zweibuchstabigen Ordnung finden hier 24 Complexionen statt, daher ist

Die 241te Versetzung bis zur 264ten, von der Ordnung ca
— 265te ——— — — 288ten, — — ——— cb
— 289te ——— — — 312ten, — — ——— cd

Die gegebene Versetzung ist daher in Rücksicht auf ihre Ordnung *cd* wenigstens die 289te und höchstens die 312te.

3) Es lassen sich hier von jeder dreibuchstabigen Ordnung 6 Complexionen denken, folglich ist

Die 289te Versetzung bis zur 294ten, von der Ordnung cda
— 295te ——— — — 300ten, — — ——— cdb
— 301te ——— — — 306ten, — — ——— cde

Die gegebene Versetzung ist ihrer Ordnung *cde* nach, wenigstens die 301te und höchstens die 306te.

4)

4) Jede vierbuchstabige Ordnung ist hier 2mal denkbar, also ist die 301te Versetzung bis zur 302ten, von der Ordnung *cdea*.

Die gegebene Versetzung ist folglich entweder die 301te oder 302te.

5) Von jeder fünfbuchstabigen Ordnung läſst sich hier nur *eine* Complexion denken. Da nun die 301te die Ordnung *cdeab* haben muſs, so ist einleuchtend, daſs die gegebene Versetzung nicht die 301te sondern die 302te ist.

§. 19.

Aufgabe.

Es sollen für den Zeiger $\binom{1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,}{a,\ a,\ a,\ b,\ c,\ c,}$ alle Versetzungen angegeben werden.

1)

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

Man schreibe zuerst die Complexion 111233, sehe diese als eine Zahl an und leite aus ihr nach §, 11. alle folgende Zahlen her. Die Zahl 111233 und die folgenden sind dann gewiſs alle mögliche Zahlenversetzungen.

Beweis.

Diese Auflösung ist die nämliche welche als arithmetisch-combinatorische für die Aufgabe des §. 15 gegeben ist, folglich gilt auch für beide ein und derselbe Beweis.

Die

Die Zahlenverſetzungen ſind dieſe:

111233	123113	211133	311321
111323	123131	211313	312113
111332	123311	211331	312131
112133	131123	213113	312311
112313	131132	213131	313112
112331	131213	213311	313121
113123	131231	231113	313211
113132	131312	231131	321113
113213	131321	231311	321131
113231	132113	233111	321311
113312	132131	311123	323111
113321	132311	311132	331112
121133	133112	311213	331121
121313	133121	311231	331211
121331	133211	311312	332111

Setzt man hier für die Zahlenelemente die damit correſpondirenden Buchſtaben, ſo hat man alle Buchſtabenverſetzungen der Elemente a, a, a, b, c, c.

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

Man ſchreibe zuerſt die Elemente gutgeordnet neben einander. Dies giebt die erſte Verſetzung. Hierauf leite man aus dieſer und ſo überhaupt aus jeder die ihr nächſtfolgende auf dieſe Weiſe her: Man ſuche von der Rechten nach der Linken das Element auf, auf welches zuerſt, ein, dem Zeiger nach, früheres Element folgt; für dieſes frühere ſubſtituire man von denen die ſich zu ſeiner Rechten befinden, dasjenige welches ihm dem Zeiger nach zunächſt folgt und ſchreibe es ſelbſt, und die welche ihm in der Complexion rechts hin folgen, die ſubſtituirte ausgenommen, gut geordnet neben die ſubſtituirte.

Beweis.

Wenn man das Ableitungsgeſetz der Auflöſung umkehrt, alſo es ſo ausdrückt: man ſuche von der Linken nach der Rechten dasjenige Element p auf, auf welches zuerſt ein früheres folgt und ſubſtituire alsdenn für das ſpätere Element p, von denen die ſich zu ſeiner Rechten befinden, das jenige welches ihm im Zeiger zunächſt vorhergeht und ſchreibe alsdenn das ſpätere Element ſelbſt nebſt denen, die ihm in der Complexion folgen, das ſubſtituirte ausgenommen, gutgeordnet neben dieſes ſubſtituirte; ſo iſt klar, daſs man ein Geſetz hat, durch deſſen fortgeſetzte Anwendung aus einer jeden ſchlechtgeordneten Complexion eine gutgeordnete wird. Iſt aber dieſes der Fall, ſo iſt auch einleuchtend, daſs das directe Ableitungsgeſetz der Auflöſung von einer gutgeordneten Complexion nothwendig zu jeder ſchlechtgeordneten führen muſs, welche aus der gutgeordneten durch verſetzung der Elemente entſtehn kann, daſs man alſo gewiſs durch die Auflöſung alle geſuchte Verſetzungen erhält.

Anmerkung.

Die Operation welche die rein combinatoriſche Auflöſung vorſchreibt, wird auch nach der arithmetiſch-combinatoriſchen vorgenommen. Es entſteht alſo die rein combinatoriſche ſogleich aus der arithmetiſchen, wenn man dieſer das arithmetiſche Gewand nimmt. Deſſen ungeachtet durfte aber doch hier der für die rein combinatoriſche Auflöſung eigene Beweis nicht vernachläſsigt werden, weil hierdurch erſt ihre völlige Unabhängigkeit von der arithmetiſchen vor Augen geſtellt wird.

§. 20.

Lehrſatz.

Die Verſetzungszahl für $a^m b^n c^p d^q$ (§. 12, 1. Erkl.) iſt gleich

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot - - - (m + n + p + q)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \times 1 \cdot 2 \cdots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q}$$

Be-

Beweis.

A, B, C, D, ſollen Complexionen bedeuten, die keine gemeinſchaftliche Elemente haben und in keiner derſelben ſoll ein und daſſelbe Element wiederhohlt vorkommen. Geſetzt nun man ſieht die Elemente von A, B, C, D, insgeſammt als ſolche an, die man verſetzen will, ſetzt aber hierbei feſt, daſs in jeder Verſetzung die Elemente, welche zu den einzelnen Complexionen A, B, C, D gehören, die Ordnung unter ſich behalten ſollen, welche ſie in A, B, C, D, wie dieſe gegeben ſind, haben, alſo daſs in dem Falle in den Verſetzungen das Element α früher als β, β eher als γ u. ſ. w. vorkommen muſs, wenn ſie als Elemente der Complexion A, in dieſer, wie ſie gegeben iſt, in der genannten Ordnung auf einander folgen; ſo iſt einleuchtend, daſs man bei einer ſolchen Einſchränkung nicht ſo viele Verſetzungen erhält, als man ohne ſie würde erhalten haben. Da nun dieſe Einſchränkung eigentlich darinn beſteht, daſs man feſtſetzt, es ſollen A, B, C, D, jede für ſich betrachtet keine Verſetzungen ihrer Elemente zulaſsen, ſo iſt klar, daſs man wegen A ſo vielmal weniger Verſetzungen erhält, als die Verſetzungszahl von A ausmacht; wegen B ſo vielmal weniger als die Verſetzungszahl von B beträgt u. ſ. w. kurz überhaupt, daſs man, wenn die Verſetzungszahlen von A, B, C, D, die Zahlen π, φ, χ, ψ ſind, auch $\pi.\ \varphi.\ \chi.\ \psi$ mal weniger Verſetzungen bekömmt, als man würde bekommen haben, wenn jene Bedingung nicht gegeben wäre. Wäre alſo die eigentliche Verſetzungszahl für die Elemente der Complexion ABCD gleich V, ſo würde die unter der gegebenen Einſchränkung erhaltene Verſetzungszahl gleich $\frac{V}{\pi.\ \varphi.\ \chi.\ \psi.}$ ſeyn. Dies giebt folgende Regel: wenn mehrere einzelne Complexionen, für ſich betrachtet, keine Verſetzungen ihrer Elemente zulaſſen, ſo findet man die Verſetzungszahl für die geſammten Elemente der gedachten Complexionen, wenn man die Verſetzungszahl aufſucht,

wel-

welche ihnen ihrer Anzahl nach, nach §. 16 zukömmt, diese aber nachher durch das Produkt von allen Versetzungszahlen dividirt, welche den einzelnen Complexionen in Hinsicht auf die Anzahl ihrer Elemente zukommen. Ist daher $a^m\ b^n\ c^p\ d^q$ gegeben, wo wirklich a^m, b^n, c^p, und d^q keine Versetzungen erlauben, so ist ihre Versetzungszahl gleich

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.\ldots\ldots(m+n+p+q)}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q}$$

Zusatz.

Es ist also die Versetzungszahl

von a^m gleich 1,

von $a^{m-1}b$ gleich m,

von $a^{m-2}b^2$ gleich $\frac{m.m-1}{1.2}$,

von $a^{m-3}b^3$ gleich $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$,

von $a^{m-4}b^4$ gleich $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$,

von $a^{m-5}b^5$ gleich $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}$, *a*) *b*)

u. s. w.

§. 21.

Aufgabe.

Es soll die Complexion angegeben werden, welche die 50te Versetzung der Elemente a, a, a, b, c, c ist.

Auflösung.

Die Auflösung dieser Aufgabe muss nothwendig im allgemeinen mit der Auflösung der Aufgabe des §. 17 über-

a) Die Exponenten in a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$ u. s. f. sind hier Wiederholungsexponenten.

b) Man vergleiche mit diesen Versetzungszahlen die Binomialcoefficienten.

übereinstimmen, man muſs alſo auch hier, wie dort, die verlangte Verſetzung dadurch erforſchen, daſs man unterſucht wie viele Complexionen es von den einzelnen auf einander folgenden Ordnungen giebt, um auf ſolche Weiſe ſucceſſiv zu erfahren, zu welcher einbuchſtabigen, zweibuchſtabigen, dreibuchſtabigen Ordnung ſie gehört u. ſ. w.

1) Die Ordnung a iſt hier 30 mal denkbar, weil die Elemente, a, a, b, c, c, 30 Verſetzungen zulaſſen, alſo in 30 verſchiedenen Stellungen unter ſich neben dem 6ten Elemente a gedacht werden können. Die Ordnung b findet hier wegen der Elemente a, a, a, c, c, 10mal ſtatt und die Ordnung c kömmt wegen der übrigen Elemente a, a, a, b, c, 20mal vor. Es iſt alſo

die 1te Verſetzung bis zur 30ten von der Ordnung a
— 31te — — — 40ten — — — b
— 41te — — — 60ten — — — c

Es hat alſo die 50te Verſetzung die Ordnung c.

2) Die Ordnung *ca* kömmt hier wegen der Elemente a, a, b, c, 12mal vor, folglich iſt

die 41te Verſetzung bis zur 52ten von der Ordnung ca.

Es hat daher die 50te Verſetzung die Ordnung ca.

3) Die Ordnung *caa* läſst ſich hier 6mal, die darauf folgende Ordnung *cab* nur 3mal und die Ordnung *cac* ebenfalls 3mal denken, alſo iſt

die 41te Verſetzung bis zur 46ten von der Ordnung caa
— 47te — — — 49ten — — — cab
— 50te — — — 52ten — — — cac

Die 50te Verſetzung hat alſo die Ordnung cac.

4)

4) Die erste vierbuchstabige Ordnung, welche sich mit *cac* anfängt, ist *caca*, folglich ist auch

die 50te Versetzung von der Ordnung *caca*.

5) Die Ordnung *cacaa* ist die erste fünfbuchstabige Ordnung, die sich mit *caca* anfängt, es ist daher

die 50te Versetzung von der Ordnung *cacaa*.

6) Da von den sechsbuchstabigen Ordnungen, welche sich mit *cacaa* anfangen die Ordnung *cacaab* die einzige mögliche hier ist, also alle gegebene Elemente, a, a, a, b, c, c, enthält, so ist einleuchtend, dass

die 50te Versetzung die Complexion *cacaab* seyn muss.

§. 22.

Aufgabe.

Es soll bestimmt werden, die wievielste Versetzung der Elemente a, a, a, b, c, c die Complexion *cacaab* ist.

Auflösung.

Weil die hier gegebene Aufgabe im Grunde mit der Aufgabe des §. 18 einerlei ist, so gilt auch im allgemeinen für beide dieselbe Auflösung. Man muss also hier successiv angeben, die wievielsten Complexionen von der Ordnung c, der Ordnung *ca*, *cac*, *caca* u. s. f. sind, und zwar auf folgende Weise:

1) Von der Ordnung *a* giebt es hier 30, von der Ordnung *b* finden 10 statt und von der Ordnung *c* kommen 20 Complexionen vor. Es ist also

die 1te Versetzung bis zur 30ten von der Ordnung a
— 31te — — — 40ten — — — b
— 41te — — — 60ten — — — c

Die gegebene Complexion *cacaab* ist also hiernach wenigstens die 41te und höchstens die 60te Versetzung.

2) Von der zweibuchstabigen Ordnung *ca* giebt es hier 12 Complexionen, folglich ist

die 41te Versetzung bis zur 52ten von der Ordnung ca.

Die gegebene Complexion ist daher ihrer Ordnung *ca* nach wenigstens die 41te und kann höchstens die 52te seyn.

3) Von der dreibuchstabigen Ordnung *caa* sind 6, von der Ordnung *cab* sind 3 und von der Ordnung *cac* ebenfalls 3 Complexionen denkbar. Es ist folglich

die 41te Versetzung bis zur 46ten von der Ordnung caa
— 47te ——— — — 49ten — — ——— cab
— 50te ——— — — 52ten — — ——— cac

Die gegebene Complexion ist also in Rücksicht auf ihre Ordnung *cac*, wenigstens die 50te und höchstens die 52te Versetzung.

4) Von der vierbuchstabigen Ordnung *caca* lassen sich 2 Complexionen denken, also ist

die 50te und 51te Versetzung von der Ordnung caca.

Die gegebene Complexion ist also ihrer Ordnung caca nach, entweder die 50te oder die 51te Versetzung.

5) Die fünfbuchstabige Ordnung *cacaa* findet nur einmal statt, folglich hat auch nur die 50te Versetzung diese Ordnung.

Da nun die gegebene Complexion diese Ordnung besitzt, so ist klar, dass sie die 50te Versetzung seyn muss.

4. Von den Combinationen.

§. 23.

1. *Erklärung.*

Das Combiniren wird eingetheilt in Combiniren überhaupt und Combiniren zu bestimmten Summen.

2.

2. *Erklärung.*

Combiniren überhaupt besteht darinn, dass man alle Unionen und alle mögliche gutgeordnete Binionen, Ternionen, Quaternionen, Quinionen u. s. w. darstellt, welche für gewisse gegebene Elemente statt finden. Eine jede der gedachten Unionen, Binionen, Ternionen u. s. f. heisst hier eine **Combination** und der Inbegriff aller Combinationen, die zu einer und derselben Klasse gehören, macht eine **Combinationsklasse** aus. *a*).

Das Zeichen des Combinirens überhaupt

für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ ist: Cb. $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ Spl. wo

Cb, Combinatio, und Spl. simplex bedeutet.

Anmerkung.

Die schlechtgeordneten Complexionen, welche sich aus den gegebenen Elementen bilden lassen, erhält man durch Versetzung der Elemente der einzelnen Combinationen.

3. *Erklärung.*

Die Combinationen der zweiten, dritten und überhaupt der *n*ten Klasse suchen, heisst sie zu 2, 3, 4 und

 im

a) Die gegebene Erklärung bestimmt eigentlich ein **Combiniren überhaupt** im engern Sinne, denn wenn man von **Combiniren überhaupt** im allgemeinen spricht, so ist es nicht nöthig grade diese gutgeordneten Complexionen anzugeben, sondern es ist hinreichend, wenn die gefundenen Complexionen alle unter sich unähnlich sind und sich die, welche ausser diesen noch aus den gegebenen Elementen gemacht werden können, durch eine blosse Versetzung aus ihnen herleiten lassen. (Einleitung §. 1. pag. 2). Es erleichtert aber das Combiniren ungemein, wenn man die Combinationen allemal gutgeordnet macht, dies ist der Grund weswegen man unter Combinationen nur gutgeordnete Complexionen versteht.

im allgemeinen zu *n* verbinden. Die Zahl zu welcher combinirt werden ſoll, wird der Exponent der Combination genannt.

4. *Erklärung.*

Verfährt man bei dem Combiniren als wäre ein jedes der gegebenen Elemente mehreremal und zwar wenn weiter nichts darüber beſtimmt wird, unendlichemal gegeben, ſo combinirt man mit Wiederholungen.

Das Zeichen hierfür iſt für den Zeiger

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ dieſes: Cb. $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ Spl. a. r.

wo a. r, *admiſſis repetitionibus* bedeutet.

Darf aber bei dem Combiniren ein jedes Element nicht öfter als gegeben gedacht werden, als es wirklich gegeben iſt, ſo combinirt man ohne Wiederholungen.

Das hierhergehörige Zeichen iſt für den Zeiger

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ dieſes: Cb. $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ Spl. o. r.

Nämlich o. r bedeutet hier *omiſſis repetitionibus.*

5. *Erklärung.*

Das Combiniren zu einer beſtimmten Summe beſteht darinn, daſs man für einen gewiſsen Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ nicht alle Combinationen ſondern nur die ſucht, deren Elementenſumme eine gegebene Zahl z. B. 6 iſt.

Die Zeichen hierfür ſind:

Cb.$\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$num. n, a. r und Cb.$\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$num. n, o. r

wo *n* die gegebene Zahl bedeutet und a. r und o. r die vorhin angegebene Bedeutung haben.

6. *Erklärung.*

Die einzelnen Combinations-complexionen zur Summe *n*, heiſsen Combinations-zerfällungen der Zahl *n*.

Will-

Willkührlicher Satz.

Die Combinationsklassen, die erste, zweite, dritte, vierte u. s. w. werden mit grossen gradestehenden lateinischen Buchstaben A, B, C, D u. s. w. bezeichnet. Um eine unbestimmte Klasse z. B. die *n*te anzudeuten, bedient man sich ebenfalls eines grossen lateinischen gradestehenden Buchstabens, aber aus einem Alphabethe dessen Buchstaben wie geschriebene aussehn z. B. für die *n*te Klasse nimmt man den Buchstaben $\mathcal{N}$, so dass also N und $\mathcal{N}$ verschiedenes bedeuten. Wird von Combinationen mit Wiederholungen gesprochen, so hängt man dem Klassenzeichen oben zur Linken einen Strich an, als 'A, 'B, 'C, 'D u. s. w. Bei Combinationen ohne Wiederholungen wird oben zur Rechten ein Strich gesetzt, als A', B', C', D' u. s. w. Für die Combinationen zur Summe *n* hat man die Zeichen $^{n\prime}$A, $^{n\prime}$B, u. s. f. und ^{n}A', ^{n}B', u. s. w., jene für die mit Wiederholungen und diese für die ohne Wiederholungen. Das Zeichen für die Combinationsinvolutionen überhaupt ist der gradestehende Buchstabe J. Bei Combinationen überhaupt mit Wiederholungen hängt man diesem oben zur Linken und bei Combinationen ohne Wiederholungen oben zur Rechten einen Strich an, so dass man die beiden Zeichen 'J und J' hat. Die Zeichen für die Combinationsinvolutionen zur Summe *n* sind $^{n\prime}$J, $^{n\prime}\mathcal{J}$ und ^{n}J', $^{n}\mathcal{J}$'.

7. *Erklärung.*

Zum Combiniren wird entweder nur eine Elementenreihe, als a, b, c, d..., oder es werden mehrere dergleichen aber unter sich verschiedene gegeben.

Anmerkung.

Das bis jetzt von Combinationen gesagte bezieht sich auf das Combiniren einer Elementenreihe insbesondere

auch wird dieſes zuerſt abgehandelt. Das andere wird unter der Ueberſchrift, von dem Combiniren mehrerer Reihen, zuletzt vorgetragen.

α) Von dem Combiniren überhaupt mit Wiederholungen.

§. 24.

Aufgabe.

Es werden für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots}{a,\ b,\ c,\ d,\ e\ldots}$ die Wiederholungs-combinationen verlangt.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe zuerſt die Unionen 1, 2, 3, 4... wie ſie, dem Zeiger nach, unter ſich folgen, neben einander. Dieſe machen die erſte Klaſſe. ('A).

2) Aus der erſten Klaſſe ('A), leite man die zweite ('B,) aus dieſer die dritte Klaſſe ('C) u. ſ. w. her, wie in §. 8. aus den einzifrigen Zahlen die zweizifrigen, aus den zweizifrigen die dreizifrigen abgeleitet werden u. ſ. w. und ſetze die zweite Klaſſe unter die erſte, die dritte unter die zweite u. ſ. f.

Subſtituirt man in den Klaſſen 'A, 'B, 'C, 'D für die Zahlen die ihnen zugehörigen Buchſtaben, ſo erhält man alle Buchſtabencombinationen der Elemente a, b, c, d u. ſ. w.

Beweis.

Es muſs hier bewieſen werden, daſs man durch das vorgeſchriebene Verfahren nur gutgeordnete Complexionen und zugleich alle erhält, welche ſich mit den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 u. ſ. f. und a, b, c, d, e u. ſ. w. ſchreiben laſſen. Daſs bei den Zahlencomplexionen beides durch die gegebnen Auflöſung erreicht wird, erhellet ſo: Es kann keine der gefundenen Complexio-

plexionen schlechtgeordnet seyn, weil sie als Zahlen betrachtet, gutgeordnete Zahlen sind (§. 8.) und es kann keine fehlen, weil sonst nicht nach §. 8. alle gutgeordnete Zahlen gefunden würden, die sich mit 1, 2, 3, 4, 5... schreiben lassen. Für die Buchstabencomplexionen erhellet die Richtigkeit daraus, daſs nach dem gegebenen Zeiger allemal ein späterer Buchstabe des Alphabeths mit einer spätern Zifer des Systems correspondirt und daſs sich keine gutgeordnete Buchstabencomplexion denken läſst, der nicht eine gutgeordnete Zahlencomplexion zugehörte.

Beispiele.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ a, & b, & c, & d, & e \end{pmatrix}$$

'A	a	b	c	d	e
'B	aa	ab	ac	ad	ae
		bb	bc	bd	be
			cc	cd	ce
				dd	de
					ee
'C	aaa	aab	aac	aad	aae
		abb	abc	abd	abe
			acc	acd	ace
				add	ade
					aee
		bbb	bbc	bbd	bbe
			bcc	bcd	bce
				bdd	bde
					bee
			ccc	ccd	cce
				cdd	cde
					cee
				ddd	dde
					dee
					eee
'D	aaaa	aaab	aaac	aaad	aaae
		aabb	aabc	aabd	aabe
			aacc	aacd	aace
				aadd	aade
					aaee
		abbb	abbc	abbd	abbe
			abcc	abcd	abce
				abdd	abde
	u.		s.		w

'A	1	2	3	4	5
'B	11	12	13	14	15
		22	23	24	25
			33	34	35
				44	45
					55
'C	111	112	113	114	115
		122	123	124	125
			133	134	135
				144	145
					155
		222	223	224	225
			233	234	235
				244	245
					255
			333	334	335
				344	345
					355
				444	445
					455
					555
'D	1111	1112	1113	1114	1115
		1122	1123	1124	1125
			1133	1134	1135
				1144	1145
					1155
		1222	1223	1224	1225
			1233	1234	1235
				1244	1245
		u.		s.	w.

2)

α) Rein combinatorische Auflösung.

1) Die gegebenen Elemente a, b, c, d, ... schreibe man in eine Horizontalreihe, wie sie im Alphabethe auf einander folgen, diese machen die erste Classe aus.

2) Man setze allen Unionen den Buchstaben a vor, so hat man die Binionen der Ordnung a. Hierauf schreibe man vor die Union b und alle folgende das Element b, dies giebt die Binionen der Ordnung b. Dann setze man vor die Union c und alle folgende das Element c, so erhält man die Binionen der Ordnung c. Dieses Verfahren setze man so lange fort bis man der vorletzten und letzten Union das vorletzte Element und endlich der letzten Union das letzte Element vorgeschrieben hat. Diese gefundenen Binionen geben die zweite Klasse.

3) Allen Binionen der zweiten Klasse schreibe man a vor, darauf setze man vor alle Binionen der Ordnung b und alle folgende das Element b, dann schreibe man den Binionen der Ordnung c und den folgenden das Element c vor u. s. w. bis man den Binionen der Ordnung des vorletzten und letzten Elements das vorletzte Element und den Binionen der Ordnung des letzten Elements, dieses letzte Element vorgesetzt hat. Die hierdurch erhaltenen Ternionen machen die dritte Klasse.

4) Auf die nämliche Weise, wie die dritte Klasse aus der zweiten gefunden wird, leite man die vierte aus der dritten, die fünfte aus der vierten und so überhaupt die nte Klasse aus der n — 1ten ab.

Die einzelnen Klassen werden in der Ordnung unter einander gesetzt wie bei der ersten Auflösung angegeben ist.

Beweis.

Die Complexionen ſind gutgeordnet, weil bei ihrer Entwickelung nie ein ſpäterer Buchſtabe des Alphabets vor einen frühern geſchrieben wird. Es kann auch keine fehlen, weil die Anname, daſs eine übergangen wird, auf einen Satz führt, deſſen Unrichtigkeit gleich in die Augen fällt. Denn geſetzt es fehlte aaa... bb.. cc...yx, ſo müſste man durch die gegebene Auflöſung auch nicht bb.. cc.. yx und deswegen auch nicht cc... yx und ſo auch nicht yx erhalten, da doch dieſes der zweiten Vorſchrift zuwider iſt.

Hiehergehörige Beiſpiele ſind die vorhingegebenen.

1. *Anmerkung.*

Die Darſtellung welche die jetzt gegebene Auflöſung giebt iſt eine Involution, nämlich in ſofern als ſie nicht nur die Combinationen der *m* Elemente a, b, c,...p, q, r, s, ſondern auch der m—1 Elemente a, b, c,...p, q, r, der m—2 Elemente a, b, c, ... p, q u. ſ. f. ſo enthält, daſs in den Combinationsklaſſen für eine gröſsere Anzahl von Elementen, die für eine jede geringere Anzahl auf die Weiſe involvirt ſind, daſs ſich die Klaſſen für die geringere Anzahl von Elementen ſehr leicht durch ein Linienziehn ſämmtlich auf einmal evolviren laſſen. Die folgende Figur zeigt dies deutlich:

	1	2	3	
A	a	b	c	d
B	a a	a b	a c	a d
		b b	b c	bd
			c c	c d
				d d
C	a a a	a a b	a a c	a a d
		a b b	a b c	a b d
			a c c	a c d
				a d d
		b b b	b b c	b b d
			b c c	b c d
				b d d
			c c c	c c d
				c d d
				d d d
D	a a a a	a a a b	a a a c	a a a d
		a a b b	a a b c	a a b d
			a a c c	a a c d
				a a d d
	1	2	3	
	u.	ſ.	w.	

Es geſchieht hier das Evolviren durch ein bloſses Ziehn grader und zwar vertikaler Linien, denn wenn man die Figur von der Linken nach der Rechten betrachtet, ſo ſchneidet die Linie 11 die Combinationsklaſſen des Elements *a* ab, die Linie 22 trennt die Combinationsklaſſen der Elemente *a* und *b* u. ſ. ſ.

Prüft man dieſe Involution ſo wird man finden, daſs ſie alle Erfordernisſe einer vollſtändigen Involution hat, (§. 13.) alſo daſs ſie wirklich eine ganz vollſtändige Involution iſt. Denn daſs ſie die erſte, zweite und vierte Erforderniſs beſitzt, fällt gleich in die Augen und daſs ihr auch die dritte nicht fehlt lehrt eine genauere Betrachtung ebenfalls. Man muſs ſich nur in Rückſicht auf dieſe dritte, die beiden horizontalen Linien zwiſchen welchen ſich eine jede einzelne Klaſſe befindet, weit genug aus einander geſetzt denken, um für die Fortſetzung dieſer Klaſſen auf mehrere Elemente, Raum genug zu haben.

2. *Anmerkung.*

Diese Darstellung welche eine Involution für die Anzahl der Elemente ist, ist nicht auch eine Involution in Rücksicht auf die auf einander folgenden Klassen, denn sollte sie eine solche Involution seyn, so müsste das Ganze nur eine Klasse bilden und in dieser müssten dann die vorhergehenden sich so befinden, dass sie durch grade Linien leicht zu evolviren wären *a*). Eine solche Involution giebt die nächstfolgende Auflösung.

3)

β) Rein combinatorische Auflösung.

1) Man setze zuerst die gegebenen Elemente a, b, c, d... der Ordnung gemäss wie sie im Zeiger stehn, unter einander. Dies giebt die erste Klasse.

2) Man setze allen Unionen den Buchstaben a vor, so hat man die Binionen der Ordnung *a*. Aus diesen, von der an die zwei verschiedene Anfangselemente hat, mache man die Binionen der Ordnung *b* indem man das erste Element in das nächstfolgende des Zeigers verwandelt. Auf die nämliche Weise leite man aus den Binionen der Ordnung *b*, die der Ordnung *c*, aus diesen wieder die der Ordnung *d* ab u. s. w. so erhält man die zweite Klasse.

3) So wie die zweite Klasse aus der ersten abgeleitet ist, leite man auch die dritte aus der zweiten, die vierte aus der dritten und so überhaupt die n—1te aus der n—2ten und die *n*te aus der n—1ten ab.

Beweis.

Diese zweite rein combinatorische Auflösung unterscheidet sich von der ersten bloss durch die Form ihrer Dar-

a) Diese Anmerkung giebt ein Beispiel für die erste des §. 13.

Darſtellung, folglich gilt für ſie auch der Beweis, der für die erſte Auflöſung gegeben iſt.

Beiſpiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3}{a,\ b,\ c}$

	a a a a a a			1 1 1 1 1 1	
	a a a a a b			1 1 1 1 1 2	
	a a a a a c	A		1 1 1 1 1 3	A
	a a a a b b			1 1 1 1 2 2	
	a a a a b c			1 1 1 1 2 3	
u.	a a a a c c	B	u.	1 1 1 1 3 3	B
	a a a b b b			1 1 1 2 2 2	
	a a a b b c			1 1 1 2 2 3	
	a a a b c c			1 1 1 2 3 3	
	a a a c c c	C		1 1 1 3 3 3	C
	a a b b b b			1 1 2 2 2 2	
	a a b b b c			1 1 2 2 2 3	
ſ.	a a b b c c		ſ.	1 1 2 2 3 3	
	a a b c c c			1 1 2 3 3 3	
	a a c c c c	D		1 1 3 3 3 3	D
	a b b b b b			1 2 2 2 2 2	
	a b b b b c			1 2 2 2 2 3	
	a b b b c c			1 2 2 2 3 3	
	a b b c c c			1 2 2 3 3 3	
	a b c c c c		w.	1 2 3 3 3 3	
w.	a c c c c c	E		1 3 3 3 3 3	E
	b b b b b b			2 2 2 2 2 2	
	b b b b b c			2 2 2 2 2 3	
	b b b b c c			2 2 2 2 3 3	
	b b b c c c			2 2 2 3 3 3	
	u. ſ. w.			u. ſ. w.	

Anmerkung.

Bei der erſten rein combinatoriſchen Auflöſung leitet man immer eine Klaſſe aus der andern her, indem man jede Complexion der folgenden aus einer Complexion der nächſtvorhergehenden macht und ſo jede Klaſſe ganz für ſich ſchreibt und die Darſtellung die man dadurch erhält iſt eine vollſtändige Involution in Rückſicht auf die Anzahl der Elemente.

Bei

Bei der zweiten rein combinatoriſchen Auflöſung hingegen, hat man bei der Ableitung einer Klaſſe aus der vorhergehenden nicht beſtändig ſein Auge auf die einzelnen Complexionen der vorhergehenden Klaſſe gerichtet, ſondern nur bei der Conſtruction der Complexionen der Ordnung a, die man dadurch findet, daſs man den ſämmtlichen Complexionen der vorhergehenden Klaſſe a vorſchreibt: denn ſobald man dieſe gefunden hat, leitet man aus ihnen, von einer beſtimmten an, die Complexionen der Ordnung b durch eine bloſse Umtauſchung des erſten Elements in das nächſtfolgende des Zeigers her und auf die nämliche Weiſe folgert man hieraus wieder die der Ordnung c u. ſ. w. Wenn man alſo die Complexionen der erſten Ordnung einer gewiſſen Klaſſe hat, ſo macht man es bloſs zu ſeinem Geſchäfte immer Ordnungen aus Ordnungen, nächſtfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden abzuleiten. Die Darſtellung welche dieſes Verfahren giebt iſt eine vollſtändige Involution in Rückſicht auf die auf einander folgenden Klaſſen.

Aus dieſer Vergleichung der beiden rein combinatoriſchen Auflöſungen werden die weſentlichen Merkmale wodurch ſie ſich von einander unterſcheiden hinreichend in die Augen fallen.

1. *Zuſatz.*

Es folgt aus beiden rein combinatoriſchen Auflöſungen, dieſe Gleichung:

$$'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E + 'F + \cdots + '\mathfrak{N}.$$
$$\left(\begin{matrix} a, & b, & c, & d \;.\;. \\ 1, & 2, & 3, & 4 \;.\;. \end{matrix}\right)$$

Bezeichnet man die vierte Klaſſe mit $\overset{0}{D}$ und dieſem gemäſs (§. 12, 8. Erkl.) die dritte mit $\overset{-1}{D}$, die zweite mit $\overset{-2}{D}$, die erſte mit $\overset{-3}{D}$, ſo erhält man, wenn die Involution bis zur vierten Klaſſe entwickelt gedacht wird, die Glei-

Gleichung $'J = '\overset{-3}{D} + '\overset{-2}{D} + '\overset{-1}{D} + '\overset{-0}{D}$. Im allgemeinen kann man daher ſetzen $'J = '\overset{-(n-1)}{\mathfrak{N}} + '\overset{-(n-2)}{\mathfrak{N}} + \ldots + '\overset{-4}{\mathfrak{N}} + '\overset{-3}{\mathfrak{N}} + '\overset{-2}{\mathfrak{N}} + '\overset{-1}{\mathfrak{N}} + '\overset{-0}{\mathfrak{N}}$.

2. *Zuſatz.*

Bedient man ſich bei der zweiten rein combinatoriſchen Auflöſung in Rückſicht auf das Element *a* der Wiederholungsexponenten (§. 12. 1te Erkl.) ſo erhält man für den Zeiger $\binom{1\ 2\ 3}{a\ b\ c}$, wenn man die Involution bis zur vierten Klaſſe entwickelt, dieſe Relation:

a a a a a		a^5		a^5
a a a a b		a^4 b		
a a a a c		a^4 c		a^4 'A
a a a b b		a^3 bb		
a a a b c		a^3 bc		a^3 'B
a a a c c		a^3 cc		
a a b b b		a^2 bbb		
a a b b c		a^2 bbc		
a a b c c	=	a^2 bcc	=	a^2 'C
a a c c c		a^2 ccc		
a b b b b		a^1 bbbb		
a b b b c		a^1 bbbc		
a b b c c		a^1 bbcc		a^1 'D
a b c c c		a^1 bccc		
a c c c c		a^1 cccc		
b b b b b		a^0 bbbbb		
b b b b c		a^0 bbbbc		
b b b c c		a^0 bbbcc		a^0 'E
b b c c c		a^0 bbccc		
b c c c c		a^0 bcccc		$\binom{2,\ 3}{b,\ c}$
c c c c c		a^0 ccccc		

Dieſe giebt die Gleichung

$$\underset{\binom{1,\ 2,\ 3}{a,\ b,\ c}}{'J} = a^5 + a^4\,'A + a^3\,'B + a^2\,'C + a^1\,'D + a^0\,\underset{\binom{2,\ 3}{b,\ c}}{'E}.$$

welche ſich allgemein ſo ausdrücken läſst:

$'J =$

$$'J = a^n + a^{n-1}\,'A + a^{n-2}\,'B + \ldots + a^0\,'\mathfrak{N}.$$
$$\binom{1,\,2,\,3,\,4\,\ldots}{a,\,b,\,c,\,d\,\ldots} \qquad \binom{2,\,3,\,4,\,5\,\ldots}{b,\,c,\,d,\,e\,\ldots}$$

Der Zeiger unter $'J$ bezieht sich auf die ganze Involution, hingegen der andere, nur auf die Klassen $'A$, $'B$, $'C$, u. s. w.

Da die zweite rein-combinatorische Auflösung allemal eine Klasse darstellt welche alle vorhergehende involvirt enthält, so läst sich ihre Darstellung im allgemeinen durch $'J\ '\mathfrak{N}$ (Involution der nten Klasse) bezeichnen und hiernach erhält man aus der zuletzt gegebenen Gleichung folgende:

$$'J\,'\mathfrak{N} = a^n + {}^{n-1}\,'A + a^{n-2}\,'B + \ldots + a^0\,'\mathfrak{N}.$$
$$\binom{1,\,2,\,3,\,4\,\ldots}{a,\,b,\,c,\,d\,\ldots} \qquad \binom{2,\,3,\,4,\,5\,\ldots}{b,\,c,\,d,\,e\,\ldots}$$

Diese Gleichung lehrt alle Klassen für den Zeiger $\binom{2,\,3,\,4,\,\ldots}{b,\,c,\,d,\,\ldots}$, nach einem bestimmten Gesetze, welches sie deutlich vor Augen legt, in eine einzige Klasse für den Zeiger $\binom{1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots}{a,\,b,\,c,\,d,\,\ldots}$ zu vereinigen. Wie hierbei die Klassen $'A, 'B, 'C,$ u. s. w. und deren Comple- $\binom{2,\,3,\,4\,\ldots}{b,\,c,\,d,\,\ldots}$ xionen zu ordnen sind, zeigt eine Betrachtung der drei vorhin aufgestellten Figuren hinreichend.

Anmerkung.

Dies giebt eine Abkürzung der zweiten rein combinatorischen Auflösung wenn durch sie eine bestimmte Klasse für den Zeiger $\binom{1,\,2,\,3,\,4\,\ldots}{a,\,b,\,c,\,d\,\ldots}$ angegeben werden soll.

3. Zusatz.

Substituirt man in der letzten Gleichung des zweiten Zusatzes für jedes Buchstabenelement das nachfolgende des Zeigers, so erhält man

$$1)\ {}^{\prime}J^{\prime}\mathfrak{N}_{\binom{2,\,3,\,4,\,5,\,\ldots}{b,\,c,\,d,\,e\,\ldots}} = b^{n} + b^{n-1\prime}A + b^{n-2\prime}B + \ldots + b^{0\prime}\,\mathfrak{N}_{\binom{3,\,4,\,5,\,6\,\ldots}{c,\,d,\,e,\,f\,\ldots}}$$

Hieraus bekömmt man wieder auf die nämliche Weise die Gleichung

$$2)\ {}^{\prime}J^{\prime}\mathfrak{N}_{\binom{3,\,4,\,5,\,6\,\ldots}{c,\,d,\,e,\,f\,\ldots}} = c^{n} + c^{n-1\prime}A + c^{n-2\prime}B + \ldots + c^{c\prime}\,\mathfrak{N}_{\binom{4,\,5,\,6,\,7\,\ldots}{d,\,e,\,f,\,g\,\ldots}}.$$

u. s. w.

Sagt man daher von einem Zeiger, dessen mtes Buchstabenelement allemal das $m-1$te eines andern Zeigers ist, dass er diesem Zeiger zunächst vorhergeht, so läst sich der Satz, welchen der zweite Zusatz lehrt, allgemein so ausdrücken: Wenn die erste, zweite, dritte, vierte u. s. w. bis zur nten Klasse für einen gewissen Zeiger gegeben sind, so kann man aus diesen sämmtlich eine einzige Klasse nämlich die nte des nächstvorhergehenden Zeigers machen und zwar nach einer und derselben Regel und umgekehrt, wenn die nte Klasse für irgend einen Zeiger gegeben ist, so läst sich diese in eine Reihe von Klassen, nämlich in die erste bis zur nten des nächstfolgenden Zeigers verwandeln.

4. Zusatz.

Es läst sich aber auch zeigen, dass man im Stande ist eine Reihe von Klassen für einen gewissen Zeiger auf eine einzige Klasse irgend eines vorhergehenden Zeigers zu reduciren und so umgekehrt. Am leichtesten läst sich

ſich dieſes durch eine Gleichung darthun, es ſoll daher eine Gleichung zwiſchen der nten Klaſſe für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4\ldots\\ a, & b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)$ und den erſten n Klaſſen für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}4, & 5, & 6, & 7\ldots\\ d, & e, & f, & g\ldots\end{smallmatrix}\right)$ entwickelt werden:

Die erſte Gleichung des 3ten Zuſatzes giebt:

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4,\ldots\\ b, & c, & d,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}'J'A,} = b^1 + b^0\,\underset{\left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}'A} = \underset{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}'A}$$

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}'J'B} = b^2 + b^1\,{}'A + b^0\,\underset{\left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}'B} = \underset{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}'B}$$

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}'J'C} = b^3 + b^2\,{}'A + b^1\,{}'B + b^0\,\underset{\left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}'C} = \underset{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}'C.}$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Setzt man dieſe Werthe der Klaſſen $\underset{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}'A,\ {}'B,\ {}'C,}$ für die nämlichen Klaſſen in die letzte Gleichung des zweiten Zuſatzes, ſo erhält man

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}^{n}J'\mathfrak{N}} = a^n + a^{n-1}\left\{\begin{matrix}b^1\\ +b^0\,{}'A\end{matrix}\right. + a^{n-2}\left\{\begin{matrix}b^2\\ +b^1\,{}'A\\ +b^0\,{}'B\end{matrix}\right. + a^{n-3}\left\{\begin{matrix}b^3\\ +b^2\,{}'A\\ +b^1\,{}'B\\ +b^0\,{}'C\end{matrix}\right. + \ldots$$

$$\left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right)$$

Die zweite Gleichung des 3ten Zuſatzes giebt

$$ {}'J'A\binom{3,4,5\ldots}{c,d,e\ldots} = c^1 + c^0\,{}'A\binom{4,5,6}{d,e,f} = {}'A\binom{3,4,5\ldots}{c,d,e\ldots} $$

$$ {}'J'B\binom{3,4,5\ldots}{c,d,e\ldots} = c^2 + c^1\,{}'A + c^0\,{}'B\binom{4,5,6\ldots}{d,e,f\ldots} = {}'B\binom{3,4,5\ldots}{c,d,e\ldots} $$

$$ {}'J'C\binom{3,4,5\ldots}{c,d,e\ldots} = c^3 + c^2\,{}'A + c^1\,{}'B + c^0\,{}'C\binom{4,5,6,\ldots}{d,e,f,\ldots} = {}'C\binom{3,4,5\ldots}{c,d,e\ldots} $$

Werden in die Gleichung*, für ${}'A, {}'B, {}'C\binom{3,4,5\ldots}{c,d,e\ldots}$, die dafür jetzt entwickelten Werthe geſetzt, ſo bekömmt man:

$$ {}'J'N\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots} = a^n + a^{n-1}\left\{\begin{array}{l} b^1 \\ + b^0\left\{\begin{array}{l} c^1 \\ + c^0\,{}'A \end{array}\right. \end{array}\right. + a^{n-2}\left\{\begin{array}{l} b^2 \\ + b^1\left\{\begin{array}{l} c^1 \\ + c^0\,{}'A \end{array}\right. \\ + b^0\left\{\begin{array}{l} c^2 \\ + c^1\,{}'A \\ + c^0\,{}'B \end{array}\right. \end{array}\right. $$

$$ + a^{n-3}\left\{\begin{array}{l} b^3 \\ + b^2\left\{\begin{array}{l} c^1 \\ + c^0\,{}'A \end{array}\right. \\ + b^1\left\{\begin{array}{l} c^2 \\ + c^1\,{}'A \\ + c^0\,{}'B \end{array}\right. \\ + b^0\left\{\begin{array}{l} c^3 \\ + c^2\,{}'A \\ + c^1\,{}'B \\ + c^0\,{}'C \end{array}\right. \end{array}\right. + \ldots, \quad \binom{4,5,6,7\ldots}{d,e,f,g\ldots} $$

dieſe

Der Buchbinder muſs aus den erſten 6 Bogen die Blätter wegſch
Blätter gehörig einbinden, welche dieſer Bogen enthält.

Diese Gleichung ist die Gesuchte; sie ist zwar nur bis auf das vierte Glied entwickelt, es liegt doch aber schon das allgemeine Gesetz nach welchen die Glieder weiter fortlaufen hinreichend vor Augen. Das $m+1$te Glied, wenn man es nach diesem Gesetze in horizontalen Reihen darstellt, ist folgendes:

$$a^{n-m}\big(b^m + b^{m-1}(c^1 + c^0\,{}'\mathrm{A}) + b^{m-2}(c^2 + c^1\,{}'\mathrm{A} + c^0\,{}'\mathrm{B}) + b^{m-3}(c^3 + c^2\,{}'\mathrm{A} + c^1\,{}'\mathrm{B} + c^0\,{}'\mathrm{C}) + \ldots + b^0(c^m + c^{m-1}\,{}'\mathrm{A} + c^{m-2}\,{}'\mathrm{B} + \ldots + c^0\,{}'\mathfrak{M})\big).$$

5. *Zusatz.*

Das Verhältniss in welcher eine Klasse eines gewissen Zeigers mit der nächstvorhergehenden des nämlichen Zeigers steht, und daher auch die Entstehung einer Klasse aus der nächstvorhergehenden kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden.

1) Die erste rein combinatorische Auflösung leitet die nte Klasse des Zeigers $\binom{1,\,2,\,3,\,4\ldots}{a,\,b,\,c,\,d\ldots}$ aus der $n-1$ten ebendesselben Zeigers auf diese Weise her: es wird zuerst den sämmtlichen Complexionen der $n-1$ten Klasse das Element a vorgeschrieben, hierauf wird den Complexionen, welche sich mit b anfangen und den folgenden das Element b, ferner denen die c zum Anfangselemente haben und den folgenden das Element c vorgesetzt u. s. w. (§. 24.).

2) Es ist der Inbegriff aller N—1tionen des Zeigers $\binom{1,\,2,\,3,\,4\ldots}{a,\,b,\,c,\,d\ldots}$ gleich $\underset{\binom{1,\,2,\,3\ldots}{a,\,b,\,d\ldots}}{{}'\mathfrak{N}}$; für eben denselben Zeiger ist der Inbegriff der N—1tionen, von der ersten an, die sich mit b anfängt gleich $\underset{\binom{2,\,3,\,4\ldots}{b,\,c,\,d\ldots}}{{}'\mathfrak{N}'}$; eben so machen die

 N—1ti-

N—1tionen des nämlichen Zeigers von der ersten an, welche c zum Anfangselemente hat, die Klasse $N_{\left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right)}$ aus u. s. w.

Die Vergleichung dieser beiden Sätze giebt die verlangte Gleichung, nämlich diese:

$$\overset{0}{N}_{\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{smallmatrix}\right)} = a\overset{-1}{N}_{\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{smallmatrix}\right)} + b\overset{-1}{N}_{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)} + c\overset{-1}{N}_{\left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right)} + d N_{\left(\begin{smallmatrix}4, & 5, & 6\ldots\\ d, & e, & f\ldots\end{smallmatrix}\right)} + c N_{\left(\begin{smallmatrix}5, & 6, & 7\ldots\\ e, & f, & g\ldots\end{smallmatrix}\right)} + \ldots$$

6. *Zusatz.*

Es lassen sich die n—1ten Klassen für die Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right)$ u. s. w. sämmtlich auf eine einzige Klasse nämlich auf die *n*te des Zeigers $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{smallmatrix}\right)$ reduciren. *a*).

7. *Zusatz.*

Die im 5ten Zusatze entwickelte Gleichung, stellet folgendes deutlich vor Augen:

1) Die *n*te Klasse besitzt so viele Complexionen der Ordnung *a*, als die n—1te Klasse Complexionen überhaupt hat.

2) Die *n*te Klasse enthält so viele Complexionen der Ordnung *b* als die n—1te Klasse noch ausser denen der Ordnung *a* besitzt.

3)

a) Es ist hierbei aber zu bemerken, dass sich ein jeder Zeiger mit dem Buchstabenelemente endigen muss, womit sich der Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{smallmatrix}\right)$ endigt.

3) Der *n*ten Klasse kommen so viele Complexionen der Ordnung *c* zu als die n—1te Klasse noch ausser denen der Ordnung *a* und *b* hat. u. s. w.

Es gilt daher folgende allgemeine Regel: wenn man wissen will wie viele Complexionen der Ordnung *p* die *n*te Klasse hat, so braucht man nur zu zählen wie viele Complexionen von der Ordnung *p* und den folgenden Ordnungen die n—1te Klasse besitzt.

Hiernach läst sich leicht eine Figur schreiben, welche für eine bestimmte Anzahl combinirter Elemente deutlich angiebt wie viele Complexionen von jeder Ordnung eine jede Klasse enthält, denn man hat nur nöthig zuerst eine Reihe von Einsen neben einander zu schreiben welche sich auf die Unionen beziehn und hieraus nach jener allgemeinen Vorschrift eine zweite zu folgern deren einzelne Glieder die Anzahl der Binionen jeder Ordnung angiebt u. s. w. wie diese Figur zeigt:

	e	d	c	b	a
'A	1	1	1	1	1
'B	1	2	3	4	5
'C	1	3	6	10	15
'D	1	4	10	20	35
'E	1	5	15	35	70
..	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Es sind hierbei die fünf verschiedenen Elemente a, b, c, d, e als die combinirten angenommen und daher neben einander über die erste Zahlenreihe gesetzt. Die Zahlen die sich mit einem dieser Buchstaben in der nämlichen Vertikalreihe befinden, bestimmen wie viele Complexionen der Ordnung dieses Buchstabens, die danebenstehende Klasse in sich begreift. Hiernach zeigt z. B. in der vierten Horizontalreihe die Zahl 20 an, dass die Klasse 'D, 20 Complexionen der Ordnung *b* enthält.

 Ver-

Vergleicht man die horizontalen Zahlenreihen mit einander so biethet sich ein noch einfacheres Gesetz dar die nächstfolgende aus der vorhergehenden herzuleiten als das zuerst gegebene ist, wovon aber doch dieses einfachere bloss als eine Folgerung angesehn werden kann. Das Gesetz ist folgendes: Wenn man das *p*te Glied der *m*ten Reihe haben will, so addirt man das *p*—1te Glied der *m*ten Reihe zum *p*ten Gliede der *m*—1ten Reihe. Es kann also die Figur auf eine leichte Weise so weit fortgesetzt und auch auf so viele Elemente ausgedehnt werden, als man will. Um das letzte zu können braucht man nur zuerst die erste horizontale Zahlenreihe fortzusetzen.

Wenn man die Figur ansieht, so fällt sogleich in die Augen, dass die *m*te vertikale Zahlenreihe mit der *m*ten horizontalen völlig übereinstimmt, es läst sich daher auch die Figur nach jenem Gesetze durch ein Schreiben vertikaler Zahlenreihen neben einander construiren, so dass man zuerst alle Zahlen schreibt, welche sich auf die Complexionen der Ordnung des letzten, hierauf die welche sich auf die Complexionen der Ordnung des vorletzten Elements beziehn u. s. w. Es kann also die Figur nach einer und derselben Regel auf doppelte Weise construirt werden, man geht nämlich entweder immer von einer Reihe für eine Klasse zu der Reihe für die nächstfolgende Klasse oder man geht von einer Reihe für die nächstfolgende Ordnung zu der Reihe für die nächstvorhergehende Ordnung über.

In der Natur des Gesetzes, nach welchen hier immer die nächstfolgende Reihe aus der nächstvorhergehenden abgeleitet wird, liegt die Gewissheit, dass einer jeden ein allgemeines endliches Glied zukömmt. Die allgemeinen Glieder sind diese: Das *n*te Glied der ersten Reihe ist 1, das der zweiten $\frac{n}{1}$, das der dritten gleich $\frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2}$, das der vierten gleich $\frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ u. s. w.

Für

Für r Elemente a, b, c, d, ... x, y, z hat man daher diese Figur:

	z	y	x	w	v		a
'A	1	1	1	1	1		1
'B	1	2	3	4	5		$\frac{r}{1}$
'C	1	3	6	10	15		$\frac{r.r+1}{1.2}$
'D	1	4	10	20	35		$\frac{r.r+1.r+2}{1.2.3}$
'E	1	5	15	35	70		$\frac{1.r+1.r+2.1+3}{1.2.3.4}$
"	"	"	"	"	"		" " " "

§. 25.

Lehrsatz.

Bei r verschiedenen Elementen ist die Anzahl der Complexionen der mten Combinationsklasse mit Wiederholungen, gleich

$$\frac{r.r+1.r+2.r+3....(r+m-2)(r+m-1)}{1.2.3.4....m-1.m}$$

Beweis.

Es kommen der m—1ten Klasse so viele Complexionen überhaupt zu, als die mte Klasse Complexionen der Ordnung a hat (§. 24, 7. Zus.(1)). Bedeutet also nc, *numerus complexionum*, so ist nach der letzten Figur des §. 24.

$$nc\,'A = r \qquad nc\,'B = \frac{r.r+1}{1.2},$$

$$nc\,'C = \frac{r.r+1.r+2}{1.2.3}$$ und so überhaupt nc. 'M

$$= \frac{r.r+1.r+2.r+3...(r+m-2)(1+m-r)}{1.2.3.4.5......m-1 \quad m}.$$

 β) Von

β) Von den Combinationen überhaupt ohne Wiederholungen.

§. 26.

Aufgabe.

Es werden die Combinationen ohne Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots}{a,\ b\ c,\ d \ldots}$ verlangt.

α) *Rein combinatorische Auflösung.*

1) Man schreibe die Unionen neben einander, dies giebt A̕.

2) Man setze dem Elemente *b* und den folgenden, *a* vor; hierauf schreibe man dem Elemente *c* und den folgenden, *b* vor; dann setze man vor *d* und die folgenden Elemente den Buchstaben *c* u. s. w. so bekömmt man B̕.

3) Aus B̕ leite man die Ternionen der Ordnungen a, b, c, d, u. s. w. her indem man allen Binionen mit dem Anfangselemente *b* und den folgenden Binionen, den Buchstaben *a*; den Binionen die sich mit c, d, e u. s. f. anfangen, den Buchstaben b vorsetzt u. s. w. Dies giebt C̕.

4) Auf die nämliche Weise, wie man C̕ aus B̕ findet, erhält man wieder D̕ aus C̕, E̕ aus D̕ u. s. w.

Die einzelnen Klassen schreibt man in der Ordnung wie man sie bekömmt unter einander.

Beweis.

Dass man durch diese Auflösung keine Combinationen mit Wiederholungen bekömmt, erhellet aus ihren vorgeschriebenen Verfahren hinreichend; dass sie aber auch a l l e Combinationen ohne Wiederholungen giebt, sieht man daraus, weil aus der Anname des Gegentheils eine

eine Absurdität folgt. Denn gesetzt es fehlte *abcd*, so müsste auch *bcd* und deswegen *cd* und aus diesem Grunde *d* fehlen; dieses ist aber gegen die erste Vorschrift der Auflösung.

Beispiele.

a,	b,	c,	d,	e	A`
	ab	ac	ad	ae	B`
		bc	bd	be	
			cd	ce	
				de	
		abc	abd	abe	C`
			acd	ace	
				ade	
			bcd	bce	
				bde	
				cde	
			abcd	abce	D`
				abde	
				acde	
				bcde	
				abcde	E`

1,	2,	3,	4,	5	A`
	12	13	14	15	B`
		23	24	25	
			34	35	
				45	
		123	124	125	C`
			134	135	
				145	
			234	235	
				245	
				345	
			1234	1235	D`
				1245	
				1345	
				2345	
				12345	E`

1, 2, 3, 4
a, b, c, d

Anmerkung.

Die Darstellung welche die Auflösung giebt ist eine Involution in Rücksicht auf die Anzahl der Elemente und das Evolviren geschieht durch grade vertikale Linien. Die hierunterstehende Figur wird dies deutlich zeigen.

a	b	c	d	A`
	ab	ac	ad	B`
		bc	bd	
			cd	
		abc	abd	C`
			acd	
			bcd	
			abcd	D`

Hiermit vergleiche man (§. 24, a Rein comb. Aufl. 1. Anmerk.)

Zuſatz.

Die Art und Weiſe wie nach der gegebenen Auflöſung immer eine Klaſſe aus der nächſtvorhergehenden hergeleitet wird, läſst ſich allgemein durch eine Gleichung darſtellen.

$$\underset{\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}}{\overset{0}{\mathfrak{N}}}{}' = a\underset{\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..}}{\overset{-1}{\mathfrak{N}}}{}' + b\underset{\binom{3,\,4,\,5\,..}{c,\,d,\,e\,..}}{\overset{-1}{\mathfrak{N}}}{}' + c\underset{\binom{4,\,5,\,6\,..}{d,\,e,\,f\,..}}{\overset{-1}{\mathfrak{N}}}{}' + d\underset{\binom{5,\,6,\,7\,..}{e,\,f,\,g\,..}}{\overset{-1}{\mathfrak{N}}}{}' + \ldots$$

Dieſe Gleichung lehrt aus den n—1ten Klaſſen für die Zeiger $\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..}$ $\binom{3,\,4,\,5\,..}{c,\,d,\,e\,..}$ $\binom{4,\,5,\,6\,..}{d,\,e,\,f\,..}$, u. ſ. w. eine einzige. nämlich die *n*te Klaſſe für den Zeiger $\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}$ zu machen.

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe die Elemente, wie ſie im Zeiger folgen in einer Reihe unter einander, ſo hat man A'

2) Man ſetze allen, *a* ausgenommen, das Element *a* vor, ſo hat man die Binionen der Ordnung *a*. Aus den Binionen der Ordnung *a* leite man die der Ordnung *b* her indem man von der an, die *c* zum zweiten Elemente hat, *a* in *b* verwandelt. Aus dieſen Binionen der Ordnung *b* folgere man die der Ordnung *c* indem man von der an, welche ſich mit *d* endigt für das Element *b* das nächſtfolgende *c* ſetzt. Auf ähnliche Weiſe leite man aus den Binionen der Ordnung *c*, die der Ordnung *d*; aus dieſen wieder die der Ordnung *e* her, u. ſ. w. und ſetze dieſe Binionen der Ordnungen b, c, d u. ſ. w. wie man

man ſie findet unter die der Ordnung a. Die gefundenen Binionen machen die Klaſſe B̀.

3) Allen Binionen, die ſich nicht mit a anfangen ſchreibe man a vor. Aus den hierdurch entſtandenen Ternionen der Ordnung a, leite man von der an die mit ac anfängt dadurch die Binionen der Ordnung b her, daſs man ihr erſtes Element a in b verwandelt. Aus dieſen Ternionen der Ordnung b folgern man wieder, von der an, die ſich mit bd anfängt, durch eine Subſtitution der c für b, die Ternionen der Ordnung c. Und ſo leite man überhaupt aus den Ternionen der Ordnung des nten Elements, die Ternionen des $n+1$ten Elements ab, daſs man von der an, deren beide erſte Elemente nicht zwei zunächſt auf einander folgende des Zeigers ſind, für das erſte Element das nächſtfolgende des Zeigers ſetzt. Dieſe Ternionen ſchreibe man bei ihrer Conſtruction ſo unter einander, wie es bei den Binionen geſchieht. Iſt die letzte Ternion hingeſchrieben, die man durch die gegebene Regel finden konnte, ſo hat man die Klaſſe C̀.

4) Auf die nämliche Weiſe, wie man C̀ aus B̀ abgeleitet hat, leite man auch D̀ aus C̀, È aus D̀ her u. ſ. w.

Beweis.

Wenn man dieſe Auflöſung mit der erſten vergleicht, ſo fällt ſogleich in die Augen, daſs beide das nämliche geben müſsen, und daſs daher auch die zweite Auflöſung richtig ſeyn muſs, weil es die erſte iſt.

Bei

Beispiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{a,\ b,\ c,\ d,\ e}$

A`	a	A`	1
B`	a\|b	B`	1\|2
	a\|c		1\|3
	a\|d		1\|4
	a\|e		1\|5
C`	a\|b c	C`	1\|2 3
	a\|b d		1\|2 4
	a\|b e		1\|2 5
	a\|c d		1\|3 4
	a\|c e		1\|3 5
	a\|d e		1\|4 5
D`	a\|b c d	D`	1\|2 3 4
	a\|b c e		1\|2 3 5
	a\|b d e		1\|2 4 5
	a\|c d e		1\|3 4 5
E`	a\|b c d e	E`	1\|2 3 4 5

Anmerkung.

Diese Darstellung ist keine Involution in Rücksicht auf die Klassen, auch ist sie nicht als eine Involution in Hinsicht auf die Anzahl der Elemente anzusehn (§. 24, 1te und 2te Anmerk.).

1. *Zusatz.*

Es ist.

a
a|b
a|c
a|d
a|e
a|b c
a|b d
a|b e
a|c d
a|c e
a|d e
a|b c d
a|b c e
a|b d e
a|c d e
a|b c d e

=

a
—
a|b
a|c
a|d
a|e
—
a|b c
a|b d
a|b e
a|c d
a|c e
a|d e
—
a|b c d
a|b c e
a|b d e
a|c d e
—
a|b c d e

=

a
—
a|A`
—
a|B`
—
a|C`
—
a|D` $\binom{2,\ 3,\ 4,\ 5}{b,\ c,\ d,\ e}$

Die-

Diese Relation giebt die Gleichung

$$\left(A^{\backprime} + B^{\backprime} + C^{\backprime} + D^{\backprime} + \ldots + \mathfrak{N}^{\backprime}\right)\binom{1,\,2,\,3,\,4\ldots}{a,\,b,\,c,\,d\ldots} =$$

$$a + \left({}_aA^{\backprime} + {}_aB^{\backprime} + {}_aC^{\backprime} + {}_aD^{\backprime} + \ldots + {}_a\mathfrak{N}^{\backprime}\right)\binom{2,\,3,\,4,\,5\ldots}{b,\,c,\,d,\,e\ldots}$$

welche lehrt, wie aus den Combinationen für den Zeiger $\binom{2,\,3,\,4,\,5\ldots}{b,\,c,\,d,\,e\ldots}$ unmittelbar die für den Zeiger $\binom{1,\,2,\,3,\,4\ldots}{a,\,b,\,c,\,d\ldots}$ erhalten werden können.

Die Vergleichung der ersten Figur mit der letzten führt auch noch auf diese Gleichungen;

$$A^{\backprime}\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots} = a + A^{\backprime}\binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots},\quad B^{\backprime}\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots} = {}_aA^{\backprime} + B^{\backprime}\binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots},$$

$$C^{\backprime}\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots} = {}_aB^{\backprime} + C^{\backprime}\binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots},$$ u. s. w. so dass $\overset{0}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots} =$

$${}_a\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime} + \overset{0}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}\binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots}$$

ist. Hieraus erhellet wie überhaupt eine Klasse für den Zeiger $\binom{1,\,2,\,3\ldots}{a,\,b,\,c\ldots}$ aus zwei zunächst auf einander folgenden Klassen für den Zeiger $\binom{2,\,3,\,4\ldots}{b,\,c,\,d\ldots}$ gemacht werden kann.

2. *Zusatz.*

Die Gleichung $\overset{0}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots} = a\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}\binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots} + b\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}\binom{3,4,5\ldots}{c,d,e\ldots} + c\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}\binom{4,5,6\ldots}{d,e,f\ldots} + \ldots,$

welche sich bei der ersten Auflösung sogleich darbiethet,

fol-

folgt aus der zweiten ebenfalls. Es ist hier der Ort von ihr Gebrauch zu machen.

Wenn man sie betrachtet, so lehrt sie ausser dem, was schon bei der ersten Auflösung bemerkt ist, noch folgendes:

1) Die *n*te Klasse der Elemente a, b, c, d u. s. w. besitzt so viele Complexionen der Ordnung *a*, als die n—1te ausser denen der Ordnung *a* besitzt.

2) Der *n*ten Klasse kommen so viele Complexionen der Ordnung *b* zu, als die n—1te ausser denen von der Ordnung *a* und *b* enthält.

3) Die *n*te Klasse hat so viele Complexionen der Ordnung *c* als die n—1te ausser denen der Ordnung a, b und c besitzt.

u. s. w.

Will man also überhaupt wissen, wie viele Complexionen der Ordnung *p* die *n*te Klasse hat, so braucht man nur zu zu zählen wie viele Complexionen von der Ordnung *q* und den folgenden Ordnungen in der n—1ten Klasse vorhanden sind. Hiernach läfst sich wie bei den Combinationen mit Wiederholungen (§. 24, 7. Zusatz) eine Figur zeichnen, die deutlich angiebt wie viele Complexionen einer jeden Ordnung eine jede Klasse enthält.

	f,	e,	d,	c,	b,	a
A	1	1	1	1	1	1
B	0	1	2	3	4	5
C	0	0	1	3	6	10
D	0	0	0	1	4	10
E	0	0	0	0	1	5
F	0	0	0	0	0	1

Die

Die Einrichtung dieser Figur ist die nämliche wie bey der in §. 24, 7. Zusatz.

Die Vergleichung der einzelnen horizontalen Zahlenreihen führt auf ein noch einfacheres Gesetz, allemal die folgende aus der nächstvorhergehenden abzuleiten, als vorhin angegeben wurde, nämlich um das pte Glied der mten Reihe zu erhalten, braucht man nur die beiden p—1ten Glieder der mten und m—1ten Reihe zu addiren. Da nun die erste Reihe nur Einsen enthält und jede der übrigen sich mit 0 anfängt, so sieht man leicht ein, dass sich die Figur durch eine sehr einfache Addition so weit ausdehnen lässt, als man will.

In der angeführten Regel die nächstfolgende Horizontalreihe aus der nächstvorhergehenden herzuleiten liegt die Nothwendigkeir, dass einer jeden der genannten Reihen ein allgemeines Glied zukömmt. Das $n+1$te Glied für die erste Reihe ist 1; für die zweite, n; für die dritte, $\frac{n.n-1}{1.2}$; für die vierte, $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$; für die fünfte, $\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}$ u. s. w. Man hat daher für rElemente a, b, c, . . . x, y, z diese Figur:

	z	y	x	w	v	. . .	a	
A	1	1	1	1	1	. . .	1	1
B	0	1	2	3	4	. . .	$r-1$	r
C	0	0	1	3	6	. . .	$\frac{r-1.r-2}{1.2}$	$\frac{r.r-1}{1.2}$
D	0	0	0	1	4	. . .	$\frac{r-1.r-2.r-3}{1.2.3}$	$\frac{r.r-1,r-2}{1.2..}$
"	"	"	"	"	"	. . .	"	" " "

Von dieser Figur wird in der Folge noch Gebrauch gemacht.

Dar-

Darstellung einzelner Klassen der Combinationen überhaupt ohne Wiederholungen.

§. 27.

Bei den Combinationen mit Wiederholungen giebt die zweite rein combinatorische Auflösung die gesuchten Klassen so, daſs sie eine einzige Klasse bilden in der sie involvirt sind, es kann daher durch diese Auflösung auch sogleich jede verlangte einzelne Klasse prompt dargestellt werden. Es war daher nicht nöthig noch besondere Aufgaben für die Bestimmungen einzelner Klassen zu geben. Hingegen bei den Combinationen ohne Wiederholungen dürfen diese nicht übergangen werden, weil keine der beiden rein combinatorischen Auflösungen für die Bestimmung aller Klassen eine Involution in Rücksicht auf die Klassen ist. (§. 24, α, Rein comb. Aufl. 2, Anmerk.).

§ 28.

Aufgabe.

Es wird die mte Klasse der Combinationen überhaupt ohne Wiederholungen für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots\end{matrix}\right)$ verlangt.

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe die ersten m Elemente des Zeigers gutgeordnet neben einander. Dies giebt die erste Complexion

2) Für das letzte Element dieser Complexion setze man successiv die höhern Elemente, bis man auf das letzte des Zeigers kömmt.

3) In der zuletzt gefundenen Complexion verwandele man das vorletzte Element in das nächstfolgende des Zei-

Zeigers und schreibe das Element daneben, welches ihm im Zeiger folgt, und leite aus dieser Complexion wieder nach 2) andere her.

4) Ist dies geschehn, so verfahre man mit der letzten dieser Complexionen aufs neue wie es 3) vorschreibt und setze dieses Verfahren überhaupt so lange fort, bis man auf eine Complexion kömmt, deren vorletztes und letztes Element mit dem vorletzten und letzten des Zeigers einerlei sind.

5) Hierauf substituire man in der Complexion, die man zuletzt erhielt, für das vorvorletzte Element das nächstfolgende des Zeigers und schreibe neben das substituirte gutgeordnet die zwei Elemente, die von ihm, dem Zeiger nach, die nächsthöhern sind und wende auf diese Complexion wieder die Vorschriften von 2) 3) und 4) an.

6) Aus der letzten Complexion lasse man nach 5) wieder andere entstehn und setze dies so lange fort, bis die drei letzten gutgeordneten Elemente der Complexion die drei letzten des Zeigers sind.

7) Ist dies der Fall so nehme man in der zuletzt erhaltenen Complexion mit dem Elemente das dem vorvorletzten vorhergeht die Substitution vor, dass man für dasselbe das ihm im Zeiger zunächstfolgende schreibt und setze die Elemente, welche dem Zeiger nach von dem substituirten die drei nächsthöhern sind, gutgeordnet daneben und folgere hieraus nach 2, 3, 4, 5 und 6 wieder neue Complexionen.

8) Auf die zuletzt hierdurch gefundene Complexion, wende man dann wieder die Vorschrift von 7 an und fahre hiermit so lange fort, bis man auf eine Complexion kömmt, deren vier letzte gutgeordnete Elemente die vier letzten des Zeigers sind.

Hieraus erhellet ſchon hinreichend wie weiter zu verfahren iſt und daſs die ganz letzte Complexion eine gutgeordnete Mtion ſeyn wird, deren Elemente die *m* letzten des Zeigers ſind.

Beweis.

Die gefundenen Complexionen ſind gewiſs gutgeordnete Mtionen, es kann aber auch keine fehlen, weil der Mangel irgend einer auch den der zuerſt hingeſchriebenen vorausſetzt. Denn geſetzt es fehlte für die Elemente a, b, c, d, e, f, wenn von der dritten Klaſſe die Rede iſt, die Complexion a b e f, ſo müſste auch a b d f, ferner a b d e, a b c f, a b c e und ſo auch a b c d übergangen ſeyn, weil dieſe nach der gegebenen Auflöſung in umgekehrter Ordnung aus einander folgen.

Beiſpiele.

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g\end{pmatrix}$$

	a b c d e	1 2 3 4 5	
	a b c d f	1 2 3 4 6	
	a b c d g	1 2 3 4 7	
	a b c e f	1 2 3 5 6	
	a b c e g	1 2 3 5 7	
	a b c f g	1 2 3 6 7	
	a b d e f	1 2 4 5 6	
E`	a b d e g	1 2 4 5 7	E`
	a b d f g	1 2 4 6 7	
	a b e f g	1 2 5 6 7	
	a c d e f	1 3 4 5 6	
	a c d e g	1 3 4 5 7	
	a c d f g	1 3 4 6 7	
	a c e f g	1 3 5 6 7	
	a d e f g	1 4 5 6 7	
	b c d e f	2 3 4 5 6	
	b c d e g	2 3 4 5 7	
	b c d f g	2 3 4 6 7	
	b c e f g	2 3 5 6 7	
	b d e f g	2 4 5 6 7	
	c d e f g	3 4 5 6 7	

2)

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe das mte und die folgenden Elemente des Zeigers gutgeordnet unter einander.

2) Man setze jedem derselben das m—1te Element des Zeigers vor und leite aus den hierdurch entstandenen Binionen der Ordnung des m—1ten Elements die Binionen der Ordnung des mten, aus diesen wieder die Binionen der Ordnung des m+1ten Elements ab u. s. f. und zwar dadurch, dass man das erste Element aller derjenigen Binionen in das nächstfolgende des Zeigers verwandelt, deren zweites Element nicht in dem Zeiger zunächst auf ihr erstes folge.

3) Vor die gefundenen Binionen schreibe man das m—2te Element des Zeigers und folgere aus den hierdurch entstandenen Ternionen wieder successiv so die Ternionen der höhern Ordnungen, wie man aus den Binionen der Ordnung des m—1ten Elements die Binionen der Ordnungen der höhern Elemente bekömmt.

4) Sämmtlichen Ternionen schreibe man das m—3te Element des Zeigers vor und lasse aus den dadurch erhaltenen Quaternionen wieder, nach dem in 2 und 3 angegebenen Ableitungsgesetze, die Quaternionen höherer Ordnungen entstehn.

5) Dieses Verfahren setze man so lange fort als für den gegebenen Zeiger möglich ist.

Beweis.

Es findet jedesmal eine gutgeordnete N—1tion ohne Wiederholungen statt, (deren Elemente zu den m—1 letzten des Zeigers gehören), aus welcher sich eine gegebene gutgeordnete Ntion ohne Wiederholungen, (deren Elemente aus den *m* letzten des Zeigers genommen sind), dadurch machen läfst, dafs man ihr entweder blofs das Element vorschreibt, welches von dem letzten des Zeigers ange-

en welche sich auf diesen Bogen befinden und statt ihrer die

angerechnet das mte ist, oder dass man für dieses vorgeschriebene successiv noch die nächsthöhern Elemente des Zeigers substituirt. Auf diese Weise leitet aber die Auflösung aus einer Klasse für die letzten p Elemente des Zeigers, allemal die nähsthöhere Klasse für die letzten p + 1 Elemente des Zeigers her; folglich ist klar, da die Auflösung, wenn der Zeiger q Elemente hat, zuerst die erste vollständige Klasse für die letzten q — (m — 1) Elemente giebt, das sie auch die ganze zweite Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen für die letzten q + 1 — (m — 1) Elemente, dass sie deswegen wieder die ganze dritte Klasse für die letzten q + 2 — (m — 1) Elemente und das sie so endlich die mte Klasse für die letzten q + (m — 1) — (m — 1) d. h. für alle Elemente des Zeigers geben muss.

Beispiele

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h}$

	a b c d e f	1 2 3 4 5 6	
	a b c d e g	1 2 3 4 5 7	
	a b c d e h	1 2 3 4 5 8	
	a b c d f g	1 2 3 4 6 7	
	a b c d f h	1 2 3 4 6 8	
	a b c d g h	1 2 3 4 7 8	
	a b c e f g	1 2 3 5 6 7	
	a b c e f h	1 2 3 5 6 8	
	a b c e g h	1 2 3 5 7 8	
	a b c f g h	1 2 3 6 7 8	
F`	a b d e f g	1 2 4 5 6 7	F`
	a b d e f h	1 2 4 5 6 8	
	a b d e g h	1 2 4 5 7 8	
	a b d f g h	1 2 4 6 7 8	
	a b c f g h	1 2 5 6 7 8	
	a c d e f g	1 3 4 5 6 7	
	a c d e f h	1 3 4 5 6 8	
	a c d e g h	1 3 4 5 7 8	
	a c d f g h	1 3 4 6 7 8	
	a c e f g h	1 3 5 6 7 8	
	a d e f g h	1 4 5 6 7 8	
	b c d e f g	2 3 4 5 6 7	
	″ ″ ″	″ ″ ″	

An-

Anmerkung.

Beide Auflösungen geben für einen und denselben Zeiger die nämliche Darstellung der *m*ten Klasse, allein das Verfahren, welches sie bei der Construction beobachten ist sehr verschieden. Die erste Auflösung nämlich, geht gleich von der ersten ganzen Complexion der *m*ten Klasse aus und geht von dieser so weiter fort, dass sie allemal die nächstfolgende ganze Complexion aus der nächstvorhergehenden herleitet; hingegen bei der zweiten Auflösung stellt man z. B. um F' zu erhalten, zuerst

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, \ldots 8 \\ a, b, c, \ldots h \end{pmatrix}$$

die erste Klasse für die Elemente f, g, h, auf, aus dieser folgert man die zweite Klasse für die Elemente e, f, g, h, hieraus leitet man wieder die dritte Klasse für die Elemente d, e, f, g, h ab u. s. w. und zwar so, dass man jedesmal bei den Uebergange zu einer höhern Klasse alle vorhergende in diese involvirt, nnd folglich ganz involutorisch verfährt.

§. 28.

Lehrsatz.

Für r verschiedene Elemente ist die Anzahl der Complexionen der *m*ten Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen gleich

$$\frac{r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \,.\, r-3 \ldots\ldots (r-(m-1))}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots\ldots\ldots m}$$

Beweis.

Es ist in der Figur des zweiten Zusatzes zur zweiten Auflösung in §. 26 allemal das r + 1te Glied irgend einer horizontalen Zahlenreihe gleich der Summe des 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. des *r*ten Gliedes der nächstvorhergehenden Reihe. Da nun diese Summe der Glieder einer Reihe die Anzahl aller Complexionen der danebenstehen-

 den

den Klaſſe beſtimmt, ſo erhellet aus der letzten Figur des §. 26, in welcher die Glieder der letzten Vertikalreihe die $r+1$ten Glieder der horizontalen Reihen ſind, zu welchen ſie gehören, daſs $nc.\,A' = r$, $nc.\,B' = \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2}$, $nc.\,C' = \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ u. ſ. w. iſt und daſs überhaupt

$$nc.\,\mathfrak{M}' = \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2 \cdot r-3 \ldots (r-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots m}$$

ſeyn muſs,

γ. Von den Combinationen zu beſtimmten Summen mit Wiederholungen.

§. 29.

Aufgabe.

Es ſollen für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots & \nu \\ a, & b, & c, & d \ldots & n \end{pmatrix}$ alle Combinationen, mit Wiederholungen, zur Summe ν gefunden werden.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe ν hin; dieſes Element macht die Klaſſe $^{\nu}A$.

2) Hieraus mache man nach den Regeln welche die Auflöſung der Aufgabe des §. 10 vorſchreibt, die zweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen Zahlen u. ſ. w. Die zweizifrigen geben die Klaſſe $^{\nu}B$, die dreizifrigen, die Klaſſe $^{\nu}C$, die vierzifrigen die Klaſſe $^{\nu}D$ u. ſ. w. Die

Die Subſtitution der Buchſtaben für die mit ihnen correſpondirenden Zifern giebt die geſuchten Buchſtabencombinationen.

Beweis.

Durch die Vorſchrift der Auflöſung der Aufgabe des §. 10 findet man hier gewiſs alle gutgeordnete Zahlen zur Summe ν und zwar zuerſt die einzifrige, dann die zweizifrigen, hierauf die dreizifrigen u. ſ. f. Eine jede dieſer Zahlen iſt eine Combination zur Summe ν und auſser ihnen kann gar keine Combination zur Summe ν gedacht werden, denn gäbe es eine ſolche Zahlencombination, ſo bildete dieſe eine Zahl zur Summe ν, welche nicht nach den Regeln der Auflöſung der gedachten Aufgabe gefunden werden könnte. Für die Zahlencomplexionen giebt alſo die einzifrige Zahl die Klaſſe ${}^{\nu}A$, die zweizifrigen geben die Klaſſe ${}^{\nu}B$, die dreizifrigen die Klaſſe ${}^{\nu}C$ u. ſ. w. und da mit einer jeden Buchſtabencomplexion eine Zahlencomplexion correſpondirt, ſo iſt einleuchtend, daſs man durch die Subſtitution der Buchſtaben die verlangten Buchſtabencombinationen bekömmt.

Beiſpiele.

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\\ a, & b, & c, & d, & e, & f\end{matrix}\right)$$

f	${}^{6}A$	6	${}^{6}A$
ae bd cc	${}^{6}B$	15 24 33	${}^{6}B$
aad abc bbb	${}^{6}C$	114 123 222	${}^{6}C$
aaac aabb	${}^{6}D$	1113 1122	${}^{6}D$
aaaab	${}^{6}E$	11112	${}^{6}E$
aaaaaa	${}^{6}F$	111111	${}^{6}F$

2)

2)

a) Rein combinatorische Auflösung.

1) Man setze das höchste Element des Zeigers als einzelnes Ding hin, so hat man A.

2) Um die folgenden Klassen zu erhalten beobachte man die Regeln, nach welchen überhaupt aus der vorhergehenden Klasse, die nächstfolgende gefunden wird.

α) Man schreibe allen Complexionen der vorhergehenden Klasse, welche sich nicht mit mehrern unter sich gleichen Elementen endigen, das erste Element des Zeigers vor und setze für das letzte Element das im Zeiger nächstvorhergehende.

β) Man suche unter den hierdurch gefundenen Complexionen, diejenigen auf, welche sich so wenig mit mehrern gleichen Elementen anfangen als endigen und substituire für dieser Complexionen erstes Element das nächstfolgende des Zeigers und für ihr letztes Element das nächstvorhergehende des Zeigers.

γ) Aus diesen jetzt gefundenen Complexionen suche man wieder auf die nämliche Weise, nämlich nach β andere zu erhalten und aus diesen leite man wieder nach eben derselben Regel andere ab und setze dieses Verfahren überhaupt so lange fort als es sich thun läßt.

Kann es nicht mehr fortgesetzt werden, weil alle Complexionen worauf die Vorschrift β) angewandt werden müßte, entweder mehrere gleiche Anfangs oder Endelemente oder beides zugleich haben, so hat man die ganze Klasse gefunden.

Beweis.

Dafs die Auflöfung nur gutgeordnete Complexionen zur Summe ν giebt ift einleuchtend; es braucht daher nur noch bewiefen zu werden, dafs man durch fie auch alle mögliche gutgeordnete Complexionen zur Summe ν bekömmt. Dies erhellet folgendermafsen: Gefetzt man fände durch fie eine gutgeordnete Ntion von der Ordnung a nicht, fo müfste man durch fie auch die N—1tion nicht finden, die entfteht, wenn man in der gedachten Ntion das erfte Element a wegftreicht und für ihr letztes das nächftfolgende des Zeigers fubftituirt (α). Fehlte eine Ntion der Ordnung b, fo müfste auch die Ntion der Ordnung a fehlen, die man aus der genannten Ntion der Ordnung b erhält, wenn man für ihr erftes Element den Buchftaben a und für ihr letztes das nächftfolgende des Zeigers fetzt (α). Hätte man aber diefe Ntion der Ordnung a nicht, fo fehlte wegen α) auch wieder eine N—1tion. Eben fo läfst fich überhaupt zeigen, dafs der Mangel irgend einer Ntion den Mangel einer N—1tion vorausfetzt. Findet man alfo durch die Auflöfung alle N—1tionen, fo erhält man durch fie auch alle Ntionen.

Man bekömmt aber durch fie gewifs $^{\nu}\mathrm{A}$, folglich auch $^{\nu}\mathrm{B}$ und aus diefem Grunde auch $^{\nu}\mathrm{C}$ u. f. w. alle Klaffen, die für die Summe ν bei dem gegebenen Zeiger möglich find.

Hierhergehörige Beifpiele find die zur erften Auflöfung gegebenen.

1. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöfung giebt eine Involution, in fo fern nämlich als fie nicht nur fucceffiv die erfte, 2te,

3te Klasse u. s. w. der Complexionen zur Summe ν, sondern auch die Complexionen zur Summe $\nu-1$, $\nu-2$, $\nu-3$ u. s. f. darstellt. Hat man nämlich durch die Auflösung die Klassen der Complexionen zur Summe ν entwickelt, so braucht man nur um die Klassen zur Summe $\nu-m$ zu evolviren, diese Vorschriften beobachten:

1) In der m 1ten Klasse schneide man das letzte Element der ersten Complexion aus, Dies ist ${}^{\nu-m}A$.

In der m+2ten Klasse trenne man die beiden letzten Elemente jeder Complexion von den vorhergehenden Elementen durch einen Vertikalstrich und ziehe unter die letzte Complexion, die sich mit dem ersten Elemente des Zeigers anfängt einen Horizontalstrich, so entsteht ein Winkel. Die Complexionen, welche dieser Winkel enthält, machen ${}^{\nu-m}B$ aus.

3) In der m+3ten Klasse trenne man die drei letzten Elemente jeder Complexion von den vorhergehenden Elementen durch einen Vertikalstrich und ziehe unter die letzte der Complexionen, die sich mit dem ersten Elemente des Zeigers anfangen einen Horizontalstrich, so erhält man einen Winkel, worinn die Ternionen enthalten sind, welche ${}^{\nu-m}C$ ausmachen.

8		
1	7	⁷A
2	6	
3	5	
4	4	
1	1 6	⁷B
1	2 5	
1	3 4	
2	2 4	
2	3 3	
1	1 1 5	⁷C
1	1 2 4	
1	1 3 3	
1	2 2 3	
2	2 2 2	
1	1 1 1 4	⁷D
1	1 1 2 3	
1	1 2 2 2	
1	1 1 1 1 3	⁷E
1	1 1 1 2 2	
1	1 1 1 1 1 2	⁷F
1	1 1 1 1 1 1 1	⁷G

4) Man erhält überhaupt $^{\nu - m}\mathfrak{N}$, wenn man in der m + nten Klasse zwischen die letzten n Elemente und die, welche vor diesen stehn, einen Vertikalstrich zieht und dann die Complexionen, welche sich mit dem ersten Elemente des Zeigers anfangen von den darunterstehenden durch einen Horizontalstrich trennt.

2. *Anmerkung.*

Da die Involution wovon hier die Rede ist, die Complexionen zur bestimmten Summe klassenweise giebt, so nennt man sie eine Klasseninvolution, in Gegensatz einer andern (3) β, Rein comb. Aufl.) welche diese Complexionen nicht Klassenweise darstellt,

Es ist aber die Klasseninvolution nur eine unvollständige Involution. (§. 13, Erklärung.).

Zusatz.

Es ist $^{n}J = {}^{n}A + {}^{n}B + {}^{n}C + {}^{n}D + {}^{n}E + \ldots + {}^{n}\mathfrak{N}$.

3.

β. *Rein combinatorische Auflösung.*

1) Man schreibe das Element hin, welches dem Zeiger nach das erste ist, so hat man die Complexion zur Summe 1.

2) Hieraus leite man die Complexionen zur Summe 2, aus diesen die Complexionen zur Summe 3, hieraus die Complexionen zur Summe 4 u. s. w. aus denen zur Summe $\nu - 1$ die zur Summe ν nach folgender Vorschrift her:

Man setzt vor alle Complexionen zur nächstvorhergehenden Summe das erste Element des Zeigers, hierauf

sucht

ſucht man unter denen welchen das erſte Element jezt vorgeſchrieben iſt, von der erſten an, die auf, deren zwei erſte Anfangselemente nicht unter ſich gleich ſind, ſchreibt für das erſte Element derſelben das nächſtfolgende des Zeigers und ſetzt die hierdurch gefundenen Complexionen, in der Ordnung wie ſie gefunden ſind unter die welche man vorher durch das Vorſetzen des erſten Elements des Zeigers erhalten hatte.

Beweis.

Die gutgeordneten Complexionen zu irgend einer Summe fangen ſich entweder mit dem erſten oder mit einem andern Elemente des Zeigers an. Im erſten Falle macht man daraus Complexionen zur nächſtvorhergehenden Summe, wenn man ihnen ihr erſtes Element nimmt und im zweiten Falle wenn man ihr erſtes Element in das nächſtvorhergehende des Zeigers verwandelt, wodurch Complexionen mit zwei verſchiedenen Anfangselementen entſtehn. Hat man alſo alle gutgeordnete Complexionen zu irgend einer Summe, ſo erhält man durch ſie gewiſs alle zur nächſtfolgenden Summe, wenn man ihnen ſämmtlich das erſte Element des Zeigers vorſetzt und bei ſolchen, die verſchiedene Anfangselemente haben, für das erſte Element das nächſtfolgende des Zeigers ſchreibt. Da man nun durch die Auflöſung die Complexion zur Summe 1 zuverläſsig erhält, ſo findet man offenbar durch ſie auch alle Complexionen zur Summe 2 und deswegen wieder alle zur Summe 3 u. ſ. w. zur Summe $\nu - 1$ und daher auch alle zur Summe ν.

Beiſpiele.

1) ${}^{7}\mathfrak{Y}$

${}^{7}\mathfrak{A}$ a a a a a a a
a a a a a b
a a a a c
a a a b b
a a a d
a a b c
a a e
a b b b
a b d
a c c
a f

${}^{7}\mathfrak{B}$ b b c
b e

${}^{7}\mathfrak{C}$ c d

${}^{7}\mathfrak{G}$ g

$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g\end{pmatrix}$

2) ${}^{7}\mathfrak{Y}$

${}^{7}\mathfrak{A}$ 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 2
1 1 1 1 3
1 1 1 2 2
1 1 1 4
1 1 2 3
1 1 5
1 2 2 2
1 2 4
1 3 3
1 6

${}^{7}\mathfrak{B}$ 2 2 3
2 5

${}^{7}\mathfrak{C}$ 3 4

${}^{7}\mathfrak{G}$ 7

I. *Anmerkung.*

Aus dem ganzen Gange, den die zweite rein combinatoriſche Auflöſung zur Darſtellung ihrer Complexionen nimmt, erhellet, daſs ſie ebenfalls eine Involution in Rückſicht auf die Summe giebt und ſchon der erſte Blick auf die beiden eben entwickelten Figuren lehrt, daſs dieſe Involution alle Erforderniſſe einer vollſtändigen hat (§. 13, Erklärung). Ihre Complexionen ordnet ſe aber nicht nach Klaſſen ſondern ganz lexicographiſch (a), aus

a) Bei der Klaſſeninvolution gehn die Conplexionen jeder einzelnen Klaſſe auch lexicographiſch fort, aber ihre Complexionen überhaupt, beobachten unter ſich keine lexicographiſche Ordnung. Die lexicographiſche hat darinn einen Vorzug, daſs ihre Darſtellung leichter iſt, aber in Betracht der gröſsern Anwendung auf die Analyſis verdient wohl die Klaſſeninvolution vorgezogen zu werden. Es läſst ſich indeſſen die lexicographiſche ſehr leicht in eine Klaſſeninvolution verwandeln.

aus dieſem Grunde nennt man ſie auch zum Unterſchiede von der Klaſſeninvolution eine Lexicographiſche und bezeichnet ſie mit $^{l}\int$ und ſo wie man für die einzelnen Klaſſen eigene Zeichen hat, bedient man ſich hier für den Inbegriff der Complexionen der Ordnung a. b, c u. ſ. w. der Zeichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, u. ſ. f. denen man ebenfalls oben zur Linken das Summenzeichen anhängt,

2. *Anmerkung.*

Wenn man die lexicographiſche Involution in arithmetiſcher Hinſicht betrachtet und ihre Zahlencomplexionen als Brüche irgend eines Zahlenſyſtems anſieht, ſo findet man, daſs dieſe wachſend fortlaufen. Denn geſetzt man ſieht die Zahlencomplexionen des vorhin gegebenen Beiſpiels als Brüche des decadiſchen Syſtems an, ſo erhält man, 0,1111111: 0,111112: 0,11113; 0,11122; 0,1114; 0,1123; 0,115; 0,1222; 0,124; 0,133; 0,16; 0,223; 0,25; 0,34; 0,7. Dieſe Betrachtung giebt die merkwürdige Relation der lexicographiſchen Involution zur Klaſſeninvolution, daſs bei beiden die Complexionen als Zahlen wachſend fortgehn, daſs dieſe aber bei der Klaſſeninvolution, ganze Zahlen, hingegen bei der lexicographiſchen, Brüche eines Zahlenſyſtems ſind.

3. *Anmerkung.*

Die lexicographiſche Involution läſst viele nützliche Umwandlungen ihrer Form zu, dieſe ſollen daher angegeben werden, wenn zuvor die beiden Gleichungen aufgeſtellt ſind, welche die Vergleichung der lexicographiſchen mit der Klaſſeninvolution und die Betrachtung der lexicographiſchen allein, ſogleich darbiethet.

1. *Zu-*

1. Zuſatz.

Es iſt $$^{n}J_{\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4\,.\,. \\ a, & b, & c, & d\,.\,.\end{pmatrix}} = {}^{n}\mathfrak{J}_{\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4\,.\,. \\ a, & b, & c, & d\,.\,.\end{pmatrix}}$$

2. Zuſatz.

Es iſt $$^{7}\mathfrak{J}_{\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g\end{pmatrix}} = {}^{7}\mathfrak{A} + {}^{7}\mathfrak{B} + {}^{7}\mathfrak{C} + {}^{7}\mathfrak{G}.$$

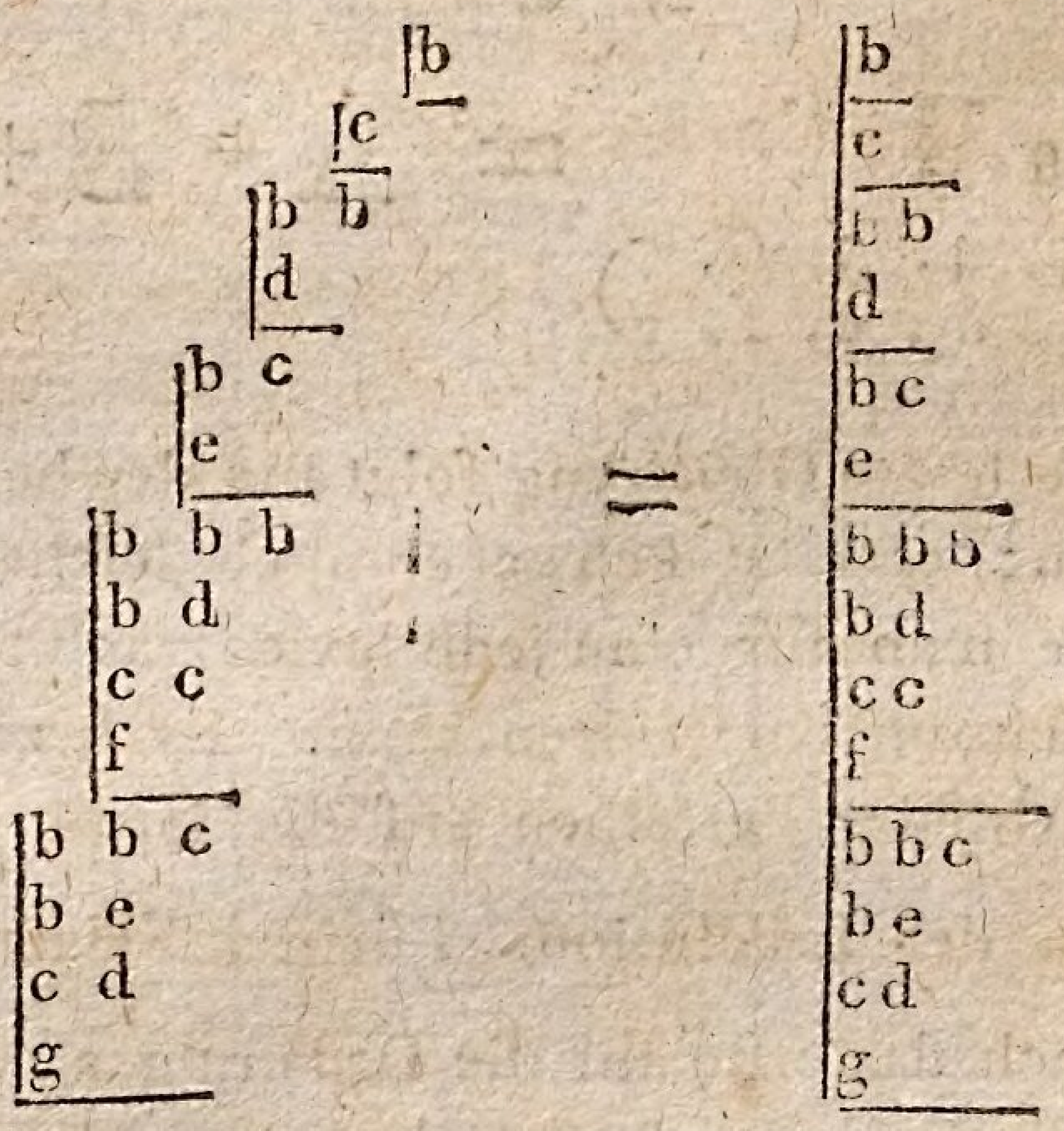
Dieſe letzte Gleichung folgt aus den beiden gegebenen Beiſpielen; es läſst ſich aber auch leicht allgemein zeigen, wie man für eine jede lexicographiſche Involution eine Gleichung conſtruiren kann. Es beziehn ſich nämlich die Glieder derſelben auf die Ordnungen der Complexionen der Involution. Für den Zeiger $\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\,.\,. \\ a, & b, & c\,.\,.\end{pmatrix}$ bezieht ſich das erſte auf die Ordnung a, das zweite auf die Ordnung b u. ſ. w. ununterbrochen fort bis zur Ordnung der vorletzten Complexion. Zwiſchen der Ordnung der vorletzten und letzten Complexion oder zwiſchen der vorletzten und letzten Ordnung entſteht aber eine Lücke, ausgenommen bei der Involution zur Summe 2. Um alſo die Glieder der Gleichung zu kennen, kömmt es nur darauf an, daſs man die vorletzte und letzte Ordnung zu beſtimmen weiſs. Dies geſchieht folgendermaſsen: Für die Summe m iſt m ſelbſt die letzte Complexion und folglich der damit correſpondirende Buchſtabe auch die letzte Ordnung. Die vorletzte Complexion iſt eine Binion und entweder iſt ihr erſtes Element als Zahl eben ſo groſs oder um 1 kleiner als das zweite Element. Läſst ſich alſo die Zahl m in zwei gleiche Theile zerlegen, ſo beſtimmt der mit dieſem Theile correſpondirende Buchſtabe auch die vorletzte Ordnung. Kann aber m nicht in zwei gleiche Theile zerfället werden, ſo zerlegt man ſie in zwei Theile,

wo-

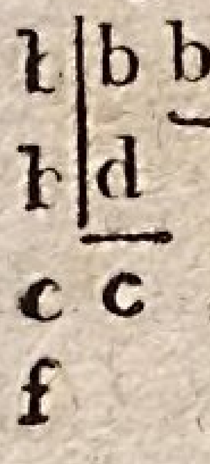
wovon der eine um 1 kleiner als der andere ist und die Ordnung des kleinern ist alsdenn die vorletzte.

3. *Zusatz.*

Läſst man im erſten Beiſpiele das Element a weg ſo erhält man die Figur



In der zweiten Figur befindet ſich zwiſchen jeden zwei Horizontalſtrichen eine lexicogrophiſche Involution, denn z. B. zwiſchen dem fünften Paare jener Linien liegt eine ſolche Involution zur Summe 6 wie aus



deutlich erhellet.

Dieſe Involutionen beziehn ſich auf den Zeiger $\left(\begin{matrix}2, & 3, & 4 & \ldots \\ b, & c, & d & \ldots\end{matrix}\right)$, ſie ſind aber keine vollſtändige, weil die Involution zur Summe n nicht auch die Complexionen zu allen vorhergehenden Summen enthält, denn z. E. in dem angeführten Beiſpiele, ſind auſser den Complexionen zur Summe 6, nur noch die zur Summe 4 und 2 enthalten.

Die

Die Conſtruction dieſer Involutionen geſchieht unabhängig von einander folgendermaſsen:

1) Man ſetzt b oder c hin, nachdem die Summenzahl für welche man die Complexionen ſucht eine grade oder ungrade Zahl iſt.

2) Man ſchreibt dem hingeſetzten Elemente, b vor und ſetzt unter dieſe Complexion das Element, welches mit ihr einerlei Summenzahl hat.

3) Man ſetzt die Involution ſo weit als nöthig iſt, nach folgender allgemeinen Regel fort: Um aus den Complexionen zur Summe n—2 die zur Summe *n* zu erhalten, wird

α) allen gedachten Complexionen b vorgeſchrieben. Dies giebt die Complexionen der Ordnung b.

β) Unter dieſen Complexionen der Ordnung b, werden die aufgeſucht, welche weder zwei gleiche Anfangs- noch Endelemente haben und hierinn wird für das erſte Element, das ihm im Zeiger folgende und für das letzte das im Zeiger ihm vorhergehende ſubſtituirt. Iſt dies geſchehn, ſo hat man die Complexionen der Ordnung c.

γ) Auf dieſelbe Weiſe leitet man aus dieſen Complexionen der Ordnung c, wieder die der Ordnung d her u. ſ. f.

δ) Laſſen ſich auf ſolche Art weiter keine Complexionen bilden, ſo ſetzt man unter die zuletzt hingeſchriebene das einzelne Element welches mit ihr einerlei Summenzahl hat.

Beispiel.

$$\overset{11}{\mathfrak{z}} \quad \binom{2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}$$

b | b | b | b | e
b | b | b | e
b | b | c | d
b | b | g
b | c | c c
b | c | f
b | d e
b | i
c | c e
c | d d
c | h
d | g
e | f
l

4. Zusatz.

Es ist

a | a | a | a | a | a | a
a | a | a | a | a | b
a | a | a | a | c
a | a | a | b b
a | a | a | d
a | a | b c
a | a | e
a | b | b b
a | b | d
a | c | c
a | f
b b c
b e
c d
g

$=$

a^6 | a
a^5 | b
a^4 | c
a^3 | b b
a^3 | d
a^2 | b c
a^2 | e
a^1 | b b b
a^1 | b d
a^1 | c c
a^1 | f
a^0 | b b c
a^0 | b e
a^0 | c d
a^0 | g

$=$

a^6 | a
a^5 | $\overset{2}{\mathfrak{z}}$
a^4 | $\overset{3}{\mathfrak{z}}$
a^3 | $\overset{4}{\mathfrak{z}}$
a^2 | $\overset{5}{\mathfrak{z}}$
a^1 | $\overset{6}{\mathfrak{z}}$
a^0 | $\overset{7}{\mathfrak{z}}$

$\binom{2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}$

Dies giebt die Gleichung

$$\overset{7}{\mathfrak{z}} = a^6 a + a^5\,\overset{2}{\mathfrak{z}} + a^4\,\overset{3}{\mathfrak{z}} + a^3\,\overset{4}{\mathfrak{z}} + a^2\,\overset{5}{\mathfrak{z}} +$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots} \qquad \binom{2,\ 3,\ 4,\ldots\ldots}{b,\ c,\ p,\ldots\ldots}$$

$$a^1\,\overset{6}{\mathfrak{z}} + a^0\,\overset{7}{\mathfrak{z}}$$

wor-

woraus für die Summe n diese folgt:

$$\underset{\binom{1,\,2,\,3,\,4\,..}{a,\,b,\,c,\,d\,..}}{\overset{n}{\mathfrak{Z}}} = a^{n-1}a + \underset{\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..}}{a^{n-2}\overset{2}{\mathfrak{Z}} + a^{n-3}\overset{3}{\mathfrak{Z}} + a^{n-4}\overset{4}{\mathfrak{Z}} + \cdot + a^{0}\overset{n}{\mathfrak{Z}}}$$

Setzt man die Glieder dieser Gleichung unter einander und neben jedes seinen entwickelten Werth und zieht dann zwischen den Gliedern und ihren Werthen einen Vertikalstrich, so erhält man diese Figur:

$$\underset{\binom{1,\,2,\,3.\,4\,..}{a,\,b,\,c,\,d\,..}}{\overset{n}{\mathfrak{Z}}}$$

$$\|$$

$$\begin{array}{l|l}
a^{n-1}a = & a^{n-1}\ (a) \\
a^{n-2}\overset{2}{\mathfrak{Z}} = & a^{n-2}\ (b) \\
a^{n-3}\overset{3}{\mathfrak{Z}} = & a^{n-3}\ (c) \\
a^{n-4}\overset{4}{\mathfrak{Z}} = & a^{n-4}\ (b^2, d) \\
a^{n-5}\overset{5}{\mathfrak{Z}} = & a^{n-5}\ (bc, e) \\
a^{n-6}\overset{6}{\mathfrak{Z}} = & a^{n-6}\ (b^3, bd, c^2, f) \\
a^{n-7}\overset{7}{\mathfrak{Z}} = & a^{n-7}\ (b^2c, be, cd, g) \\
a^{n-8}\overset{8}{\mathfrak{Z}} = & a^{n-8}\ (b^4, b^2d, bc^2, bf, ce, d^2, h) \\
a^{n-9}\overset{9}{\mathfrak{Z}} = & a^{n-9}\ (b^3c, b^2e, bcd, bg, c^3, cf, de, i) \\
a^{n-10}\overset{10}{\mathfrak{Z}} = & a^{n-10}\ (b^5, b^3d, b^2c^2, b^2f, bce, bd^2, bh, c^2d, cg. \\
 & \qquad df, e^2, k) \\
\text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.} \\
\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..} &
\end{array}$$

Staatliche Bibliothek Bamberg

Das Gesetz nach welchem die Widerholungsexponenten der a fortgehn liegt hier deutlich vor Augen. Das Fortschreitungs-Gesetz für die Complexions-Reihen, denen die a vorgesetzt sind, ist dieses:

Um die *m*te Reihe zu erhalten schreibt man 1) allen Complexionen der m—2ten Reihe b vor; hierauf substituirt man 2) in allen Complexionen der m—1ten Reihe, welche zwei ungleiche Anfangselemente haben, für das erste das nächstfolgende des Zeigers $\binom{2,\ 3,\ 4,\ .}{b,\ c,\ d.\ .}$ und schreibt 3) die Complexionen welche 1 und 2 geben, in der Ordnung wie sie gefunden werden neben einander.

Anmerkung.

Diese Darstellung ist die vollständigste Involution, die sich denken läst, weil bei ihr der Fortgang zu dem Folgenden völlig offen steht und das Absondern des Vorhergehenden von dem Folgenden durch ein Ziehn eines einzigen Horizontalstrichs geschieht. Denn will man

z. B. $^{9}\overset{\mathfrak{r}}{\mathfrak{J}}$ haben, so braucht man nur unter $a^{n-9}\,\overset{9}{\overset{\mathfrak{r}}{\mathfrak{J}}}$ und den $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ .}{a,\ b,\ c,\ d.\ .}$ dazugehörigen Werth einen Strich zu ziehn, was sich dann über diesem Striche befindet giebt die verlangte lexicographische Involution, so bald man darinn statt *n* die Zahl 9 setzt.

5. *Zusatz.*

Ordnet man in der Figur des vierten Zusatzes, die Complexionen welche in Klammern eingeschlossen sind so neben einander, dass die einbuchstabige die erste ist und dieser, lexicographisch, die zweibuchstabigen, dann die dreibuchstabigen Complexionen folgen u. s. w. und dass hierbei die Complexionen der Involution überhaupt,

zu-

zugleich ſo übereinander kommen, daſs ſich die *ein*buchſtabigen ſämmtlich durch einen Vertikalſtrich von den zweibuchſtabigen, dieſe wieder auf die nämliche Weiſe von den dreibuchſtabigen trennen laſſen u. ſ. w. ſo erhält man wenn dies letzte geſchieht, dieſe Figur:

$${}^{n}J\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3..\\ a. & b, & c..\end{matrix}\right)$$

a^{n-1}	a					1
a^{n-2}	b					2
a^{n-3}	c					3
a^{n-4}	d	b^2				4
a^{n-5}	e	bc				5
a^{n-6}	f	bd cc	b^3			6
a^{n-7}	g	be cd	b^2c			7
a^{n-8}	h	bf ce d^2	b^2d bc^2	b^4		8
a^{n-9}	i	bg cf de	b^2e bcd c^3	b^3c		9
a^{n-10}	k	bh cg df e^2	b^2f bce bd^2 c^2d	b^3d b^2c^2	b^5	10

Die Zahlen welche in der Figur neben dem Doppelſtriche ſtehn, zählen von oben nach unten die Horizontalcolumnen, ſo ſind z. B. f, bd, cc b^3 Complexionen der 6ten Columne.

Das Geſetz für die Conſtruction dieſer Figur, iſt dieſes:

1) Es werden a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3}, a^{n-4} u. ſ. w. in eine Vertikalreihe unter einander geſchrieben.

2) Hierneben setzt man die Unionen, a, b, c, d.., wie sie im Zeiger folgen,

3) Sämmtlichen Unionen, a ausgenommen, setzt man b vor und schreibt diese Binionen so neben die Unionen, dass die erste um zwei Columnen tiefer steht als b.

4) Unter diesen sucht man, von der ersten an, die auf, welche sich mit zwei verschiedenen Elementen anfangen und verwandelt das erste Element derselben in das nächstfolgende des Zeigers und schreibt die hierdurch entstandenen Binionen so neben die der Ordnung b, dass die erste der Ordnung c um *eine* Columne tiefer steht als die der Ordnung b, aus der sie abgeleitet ist. Auf gleiche Weise leitet man aus den Binionen der Ordnung c die der Ordnung d, aus diesen wieder die der Ordnung e her u. s. f, und ordnet die Complexionen der nächstfolgenden Ordnung q jedesmal so neben die der nächstvorhergehenden Ordnung p, dass die erste Complexion der Ordnung q um *eine* Columne tiefer kömmt als die der Ordnung p steht aus der man sie gemacht hat.

5) Vor alle Binionen schreibt man b und setzt die hierdurch erhaltene erste Ternion um 2 Columnen tiefer als die erste Binion steht und zwar zugleich so, dass sie durch eine Vertikallinie von der letzten Binion getrennt werden kann; die Ternionen selbst aber, ordnet man so neben einander, wie die Binionen geordnet sind, aus welchen man sie abgeleitet hat. Aus diesen Ternionen der Ordnung b folgert man wieder die der Ordnung c, wie man bei den Binionen aus denen der Ordnung b die der Ordnung c folgert und schreibt die Ternionen die man hierdurch erhält, einzeln so neben die Ternionen der Ordnung b, dass eine jede um eine Columne tiefer kömmt als die steht, aus welcher sie gemacht ist. Auf die nämliche Weise wie man die Ternionen der Ordnung c bekömmt, erhält man auch die der Ordnung d, aus diesen wieder die der Ordnung e u. s. f. und beobachtet hierbei in Rücksicht auf das Nebeneinanderschreiben die Vorschrift nach wel-

welcher die Ternionen der Ordnung c neben die der Ordnung b geschrieben werden,

6) Alle Operationen, welche 5) vorschreibt nimmt man wieder vor um die Quaternionen zu erhalten, hierauf wieder um die Quinionen zu bekommen u. s. w.

Anmerkung.

Die Figur des vierten Zusatzes giebt die lexicographische Involution für eine jede bestimmte Summe, die Figur dieses fünften Zusatzes hingegen, die Klasseninvolution jeder Summe. Um die Klassen für jede Summe z, B. für die Summe 7 zu erhalten, hat man hier folgende Operationen vorzunehmen:

1) Man substituirt für n die Zahl 7 und zieht unter a^0 und die daneben liegenden Complexionen einen Strich.

2) Um eine Klasse z. B. die dritte für diese Summe zu erhalten, steigt man von der Union der letzten Horizontalcolumne zu der Union herauf, welche sich in der Columne befindet, die von der letzten angerechnet, die dritte ist. Hierauf zieht man in Gedanken durch das Rechteck, worinn die Union liegt zu der man hinaufgestiegen ist, von oben nach unten und zwar von der Linken nach der Rechten eine Diagonallinie, eben so wieder durch das Rechteck in dessen einer Winkelspitze der Endpunkt der gezogenen Diagonallinie liegt u. s. w. wie es in der Figur angegeben ist.

3) Die Complexionen welche sich in diesen Rechtcken befinden, nämlich e, bd, cc, bbc schreibt man verbunden mit den ihnen zukommenden a unter einander, wie hier folgt: a a e.
a b d
a c c
b b c

Ist dies geschehn so hat man die verlangte Klasse.

6. *Zusatz.*

Läßt man in der Figur des fünften Zusatzes die Ausdrücke weg, welche a enthalten, und betrachtet

dann ihre Complexionen in Rückſicht auf den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\,..}{b,\ c,\ d,\ e\,..}$, ſo ergiebt ſich:

1) daſs die Unionen die erſten Klaſſen zu den Summen 1, 2, 3, 4 u. ſ. f. ausmachen.

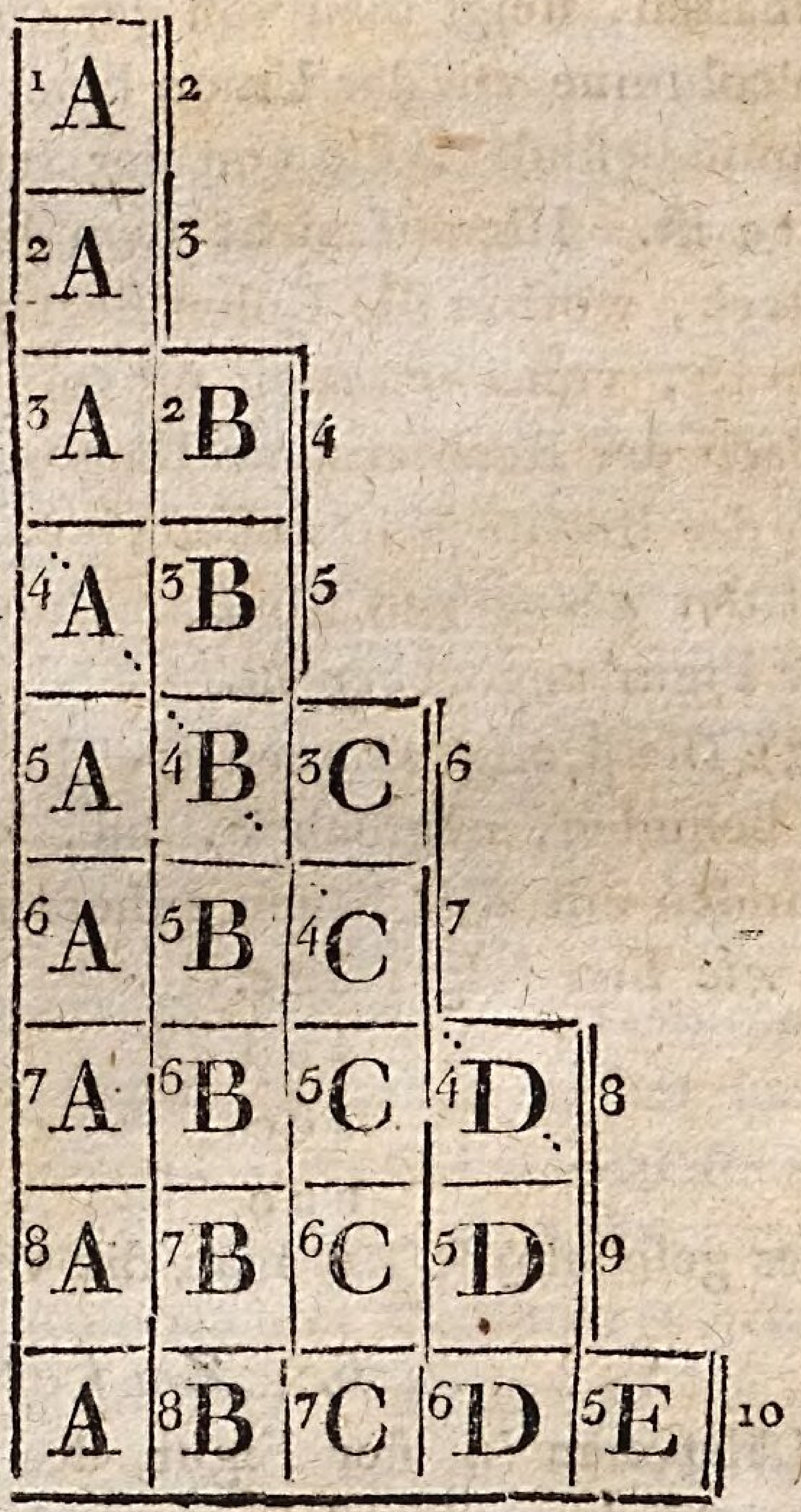
2) Daſs die neben dieſen Unionen zunächſtliegenden Rechtecke, von dem oberſten an, die zweiten Klaſſen zu den Summen 2, 3, 4 u. ſ. f. beſitzen.

3) Daſs neben dieſen zweiten Klaſſen ſich wieder die dritten Klaſſen zur Summe 3 und den folgenden Summen befinden.

u. ſ. w.

Hiernach kann man die gedachte Figur, wenn man die a wegläſst einfacher ſo ausdrücken.

$\binom{1,\ 2,\ 3\,..}{b,\ c,\ d\,..}$



Au-

Anmerkung.

Gleich der erſte Blick auf die Figur lehrt, daſs man in Stande iſt durch ſie auf eine leichte Weiſe alle Klaſſen zu jeder beſtimmten Summe zu finden; denn z. B. um alle Klaſſen zur Summe 4 zu erhalten, braucht man nur die Klaſſen zu nehmen, welche in der Diagonallinie liegen, die in der Figur angegeben iſt. Die Figur des fünften Zuſatzes giebt alſo nicht nur für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ ſondern auch für $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}$ alle Klaſſen zu einer jeden beliebigen Summe. Es iſt aber ein groſser Unterſchied, wie ſie die Klaſſen für die beiden angegebenen Zeiger enthält. Für $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ befinden ſich die einzelnen Complexionen, die in Verbindung mit den ihnen zukommenden a eine einzige Klaſſe ausmachen im mehrern verſchiedenen Rechtecken, hingegen für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}$ iſt in einem jeden Rechtecke jedesmal eine ganze Klaſſe enthalten.

7. *Zuſatz.*

Die Vergleichung der Figuren des 5ten und 6ten Zuſatzes giebt dieſe Gleichung:

$$\underset{\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}}{{}^{n}J} = a^{n-1}a + a^{n-2}\,{}^{1}A + a^{n-3}\,{}^{2}A + a^{n-4}\left\{\begin{matrix}{}^{3}A +\\ +{}^{2}B\end{matrix}\right.$$

$$a^{n-5}\left\{\begin{matrix}{}^{4}A +\\ +{}^{3}B\end{matrix}\right. a^{n-6}\left\{\begin{matrix}{}^{5}A +\\ +{}^{4}B\\ +{}^{3}C\end{matrix}\right. a^{n-7}\left\{\begin{matrix}{}^{6}A +\\ +{}^{5}B\\ + C\end{matrix}\right. a^{n-8}\left\{\begin{matrix}{}^{7}A +\\ +{}^{6}B\\ +{}^{5}C\\ +{}^{4}D\end{matrix}\right.$$

$$a^{n-9}\left\{\begin{matrix}{}^{8}A + \ldots\\ +{}^{7}B\\ +{}^{6}C\\ +{}^{5}D\end{matrix}\right.$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots.}{b,\ c,\ d,\ e\ldots.}$$

 Dar-

Darſtellung einzelner Klaſſen der Combinationen mit Wiederholungen zu beſtimmten Summen.

§. 30.

Aufgabe.

Es wird die *m*te Klaſſe zur Summe *n* für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e, & f \ldots \end{pmatrix}$ verlangt.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe m—1 Einheiten neben einander und ſetze das Supplement zur Summe *n*, als letztes Element der Complexion rechts daneben, welches alſo hier gleich $n-(m-1) = n+1-m$ iſt, ſo hat man die erſte Complexion der ${}^{n}\mathfrak{M}$.

2) Aus dieſer leite man die zweite; aus der zweiten die dritte; aus der dritten die vierte Complexion u. ſ. w. nach der Regel ab, welche der 17te Satz des §. 2. überhaupt giebt um aus einer gutgeordneten Zahl die nächſtgröſsere zu der nämlichen Zifernſumme zu erhalten. Die *m*zifrige Zahl, auf welche man hierbei kömmt, aus der nach der genannten Regel keine gröſsere *m*zifrige Zahl hergeleitet werden kann, iſt die letzte Complexion der Klaſſe.

Subſtituirt man in den erhaltenen Zahlencomplexionen für die Zifern, die damit correſpondirenden Buchſtaben, ſo erhält man die geſuchten Buchſtabencomplexionen.

Beweis.

Man geht hier von der kleinſten mzifrigen gutgeordneten Zahl der Zifernſumme *n* zu allen gröſsern der nämlichen Summe fort, folglich kann keine Zahlencomplexion übergangen werden, und daher giebt auch die angegebene Subſtitution der Buchſtaben für die Zahlen, alle Buchſtabencomplexionen.

Bei-

Beispiele.

$\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots}{a, b, c, d, e, f, g \ldots}$

^{10}D	aaag		1117	^{10}D
	aabf		1126	
	aace		1135	
	aadd		1144	
	abbe		1225	
	abcd		1234	
	accc		1333	
	bbbd		2224	
	bbcc		2233	

2)

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man durchlaufe in dem Zeiger, von der Zahl *n* an, von der Rechten nach der Linken, *m* Elemente und setze das *m*te Element worauf man hierbei kömmt als Union hin.

2) Dieser Union schreibe man das erste Element des Zeigers vor, so hat man eine Binion. Aus dieser Binion mache man eine zweite, indem man für ihr erstes Element das nächstfolgende und für ihr letztes das nächstvorhergehende des Zeigers setzt. Auf die nämliche Weise leite man hieraus eine dritte, aus der dritten eine vierte u. s. w. her und setze dieses so lange fort bis man eine Binion bekommen hat deren beide Elemente entweder unter sich gleich oder für den gegebenen Zeiger zwei zunächst auf einander folgende sind.

3) Man setze vor alle gefundene Binionen das erste Element des Zeigers, so erhält man Binionen der Ordnung dieses Elements. Unter diesen suche man die auf, welche sowohl zwei verschiedene Anfangs- als Endelemente haben und setze für dieser ihr erstes Element das nächstfolgende des Zeigers und für ihr letztes das im Zeiger nächstvorhergehende. Hierdurch bekömmt man Ternionen

nen der Ordnung b. Auf die nämliche Weise leite man hieraus wieder, Ternionen der Ordnung c; aus diesen aufs neue Ternionen der Ordnung d her u. s. w. und setze dieses Verfahren überhaupt so lange fort, bis man auf Complexionen einer Ordnung gekommen ist, unter welchen sich keine befindet, die sowohl zwei verschiedene Anfangs- als Endelemente hat.

4) Eben so wie man aus den Binionen die Ternionen ableitet, leite man aus diesen wieder, Quaternionen, aus den Quaternionen, Quinionen her u. s. w. bis man auf diese Weise durch die M—1tionen zu den Mtionen gekommen ist. Diese machen alsdenn die verlangte Klasse aus.

Beweis.

Aus den gegebenen Regeln erhellet hinreichend, daſs man durch sie nur gutgeordnete Complexionen bekömmt. Diese Complexionen haben auch die verlangte Summe; denn die Union, welche man hinschreibt ist die Zahl n—(m—1) selbst, oder correspondirt doch mit dieser. Die Binionen sind aus diesem Grunde Complexionen zur Summe n—(m—2); die Ternionen haben die Summe n—(m—3), u. s. f. die Mtionen die Summe n—(m—m), also die gegebene Summe n. Es kann aber auch keine Mtion fehlen, denn nähme man an, daſs irgend eine z. B. von der Ordnung d fehlte, so müſste man auch die von der Ordnung c nicht haben, welche entsteht, wenn man in der fehlenden von der Ordnung d, das erste Element d in das nächstvorhergehende und das letzte in das nächstfolgende des Zeigers verwandelt. Auf gleiche Weise setzt dieser Mangel wieder den einer Mtion der Ordnung b und dieser wieder das Fehlen einer Complexion der Ordnung a voraus. Hätte man aber eine Mtion der Ordnnng a nicht, so müſste auch wieder die M—1tion zur Summe n—1 übergangen seyn, welche man aus der fehlenden der Ordnung a dadurch bekömmt, daſs man das erste Element ganz wegläſst.

Hier-

Hieraus würde aber wieder eben so der Mangel einer M—2tion zur Summe n—2 folgen, wie aus dem Mangel einer Mtion das Fehlen einer M—1tion folgte und auf gleiche Weise würde wieder das Auslassen der gedachten M—2tion voraussetzen, dass auch eine M—3tion zur Summe n—3 u. s. w. eine Binion zur Summe n—(m—2) und zuletzt eine Union zur Summe n—(m—1) fehlte. Dies letzte ist aber nicht möglich, weil die genannte Union zuerst hingeschrieben wird.

Beispiele.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i, & k & l, & \ldots \end{pmatrix}$$

^{13}E	a a a a i	1 1 1 1 9	^{13}E							
	a a a b h	1 1 1 2 8								
	a a a c g	1 1 1 3 7								
	a a a d f	1 1 1 4 6								
	a a a e e	1 1 1 5 5								
	a a b b g	1 1 2 2 7								
	a a b c f	1 1 2 3 6								
	a a b d e	1 1 2 4 5								
	a a c c e	1 1 3 3 5								
	a a c d d	1 1 3 4 4								
	a b b b f	1 2 2 2 6								
	a b b c e	1 2 2 3 5								
	a b b d d	1 2 2 4 4								
	a b c c d	1 2 3 3 4								
	a c c c c	1 3 3 3 3								
	b b b b e	2 2 2 2 5								
	b b b c d	2 2 2 3 4								
	b b c c c	2 2 3 3 3								

Anmerkung.

Das Verfahren der zweiten Auflösung ist völlig involutorisch, daher auch ihre Darstellungen Involutionen sind, wie aus den eben gegebenen Beispielen deutlich erhellet.

1. Zu-

1. *Zusatz.*

Es ist

$$
\overset{13}{\underset{\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}}{E}} = \begin{array}{l} aaaai \\ aaabh \\ aaacg \\ aaadf \\ aaaee \\ \hline aabbg \\ aabcf \\ aabde \\ aacce \\ aacdd \\ \hline abbbf \\ abbce \\ abbdd \\ abccd \\ acccc \\ \hline bbbbe \\ bbbcd \\ bbccc \end{array} = \begin{array}{l|l} a^4 & i \\ \hline & bh \\ a^3 & cg \\ & df \\ & ee \\ \hline & bbg \\ & bcf \\ a^2 & bde \\ & cce \\ & cdd \\ \hline & bbbf \\ & bbce \\ a^1 & bbdd \\ & bccd \\ & cccc \\ \hline & bbbbe \\ a^0 & bbbcd \\ & bbccc \end{array} = \begin{array}{r|l} a^4 & {}^{9}A \\ \hline a^3 & {}^{10}B \\ \hline a^4 & {}^{11}C \\ \hline a^1 & {}^{12}D \\ \hline a^0 & \underset{\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..}}{{}^{13}E} \end{array}
$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$
\underset{\binom{1,\,2,\,3,\,4,\,.}{a,\,b.\,c,\,d\,..}}{{}^{13}E} = a^4\,{}^{9}A + a^3\,{}^{10}B + a^2\,{}^{11}C + a^1\,{}^{12}D + a^0\,\underset{\binom{2,\;3,\;4\,..}{b,\;c,\;d\,..}}{{}^{13}E},
$$

welche allgemein für die Summe $r+n$ ausgedrückt diese Form hat:

$$
\underset{\binom{1,\,2,\,3,\,4\,..}{a,\,b,\,c,\,d\,..}}{{}^{r+n}\mathfrak{N}} = a^{n-1}\,\underset{\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..}}{{}^{r+1}A} + a^{n-2}\,{}^{r+2}B + a^{n-3}\,{}^{r+3}C + \,..\, + a^{n-m}\,{}^{r+m}\mathfrak{M} + \,..
$$

2. Zusatz.

Die Klassen $\underset{\binom{2,\ 3,\ 4,\ 5\,..}{b,\ c,\ d,\ e\,..}}{{}^{r+1}A,\ {}^{r+2}B,\ {}^{r+3}C,\ {}^{r+4}D}$ u. s. f.

findet man, wenn $\underset{\binom{1,\ 2,\ 3\,..}{b,\ c,\ d\,..}}{{}^{r}A,\ {}^{r}B,\ {}^{r}C,\ {}^{r}D}$ u. s. w. nach einer der beiden ersten Auflösungen des §. 29. aufgesucht werden. Denn wenn man die Klassen zur Summe r für den Zeiger $\binom{1,2,3\,..}{b,c,d\,..}$ als Klassen für den Zeiger $\binom{2,3,4\,..}{b,c,d\,..}$ ansieht, so giebt man dadurch jedem Elemente der Species jener Klassen einen um 1 höhern Werth; also aus der Union zur Summe r wird eine Union zur Summe r+1; aus den Binionen zur Summe r, werden Binionen zur Sur Summe r+2; aus den Ternionen zur Summe r, werden Ternionen zur Summe r+3 u. s. f. so dass also

$$\underset{\binom{1,\ 2,\ 3\,..}{b,\ c,\ d\,..}}{{}^{r}A,\ {}^{r}B,\ {}^{r}C,\ {}^{r}D} \text{ und } \underset{\binom{2,\ 3,\ 4\,..}{b,\ c,\ d\,..}}{{}^{r+1}A,\ {}^{r+2}B,\ {}^{r+3}C,\ {}^{r+4}D}$$

in Rücksicht auf ihre Buchstabencomplexionen völlig mit einander übereinstimmen.

Es kann daher auch der letzten Gleichung des ersten Zusatzes diese Form gegeben werden:

$$\underset{\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\,..}{a,\ b,\ c,\ d\,..}}{{}^{r+n}\mathfrak{N}} = a^{n-1}\,\underset{\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\,..}{b,\ c,\ d,\ e\,..}}{{}^{r}A + a^{n-2}\,{}^{r}B + a^{n-3}\,{}^{r}C} + \ldots$$

$$+ a^{n-m}\,{}^{r}\mathfrak{M} + \ldots,$$

wobei zu bemerken ist, dass man die Glieder so weit fortsetzen muss, bis m = n oder = r wird, d. h. so lange bis man auf $a^{0}\,{}^{r}\mathfrak{N}$ oder zu $a^{n-r}\,{}^{r}\mathfrak{R}$ kömmt, nachdem $r > n$ oder $< n$ ist. Z. B.

$$^{15}E = {}_{a}4^{10}A + {}_{a}3^{10}B + {}_{a}2^{10}C + {}_{a}1^{10}D + {}_{a}0^{10}E$$

$$\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4\,.. \\ a, & b, & c, & d\,..\end{smallmatrix}\right) \qquad \left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4\,.. \\ b, & c, & d. & e\,..\end{smallmatrix}\right)$$

$$^{8}E = {}_{a}4^{3}A + {}_{a}3^{3}B + {}_{a}2^{3}C$$

3. *Zusatz.*

Die Gleichung des zweiten Zusatzes für $^{r+n}\mathfrak{N}$ giebt die merkwürdige Relation zwischen der *n*ten Klasse zur Summe r+n für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4\,... \\ a, & b, & c, & d\,...\end{smallmatrix}\right)$ und der Klasseninvolution zur Summe r für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4,\,.. \\ b, & c, & d, & d,\,..\end{smallmatrix}\right)$, dafs die Klasseninvolution, durch ein blofses Vorsetzen der a, in die *n*te Klasse und dafs die *n*te Klasse, durch ein Trennen der a, in die Klasseninvolution verwandelt werden kann. Beides fällt auch sogleich bei der Betrachtung der mittlern Figur des 1ten Zusatzes in die Augen; wenn man die ganze Figur auf den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4,\,... \\ a, & b, & c, & d,\,...\end{smallmatrix}\right)$ und die Klassen, welche durch einen Strich von den a getrennt sind, auf den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4\,... \\ b, & c, & d, & e\,...\end{smallmatrix}\right)$ bezieht.

4. *Zusatz.*

Dafs man einer jeden einzelnen Klasseninvolution zur Summe r, eine Complexion von a so vorsetzen soll, wie es die Gleichung des zweiten Zusatzes bestimmt, kann man dadurch anzeigen, dafs man dem Zeichen $^{r}\mathfrak{J}$ ein a mit dem Wiederholungsexponenten n—* vorschreibt, wo * alsdenn mit dem Klassenexponenten (§. 12, 8. Erkl.) übereinstimmt. Hiernach läfst sich also die Gleichung des 2ten Zusatzes auch so ausdrücken:

$$^{r+n}\mathfrak{N}$$

$$ {}^{r+n}\underset{\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots,}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}}{\mathfrak{N}} = a^{n-*}\ {}^{r}\underset{\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d,\ e\ldots}}{\mathfrak{J}} $$ a).

§. 31.

Anmerkung.

Bei der Aufgabe des §. 30. ist der Zeiger so angenommen, daſs es für sie keine Complexionen geben kann, die deswegen unnütze sind, weil in ihnen höhere Elemente vorkommen, als der Zeiger enthält. Es ist aber einleuchtend, daſs sich der Zeiger so begrenzen läſst, daſs für eine Klasse zu einer gewissen Summe in der genannten Hinsicht unnütze Complexionen statt finden können. Denn so giebt es z. B. für $ {}^{15}\underset{\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4}{a,\ b,\ c,\ d}}{\mathrm{E}} $ funfzehn dergleichen Complexionen und es lassen sich leicht Fälle angeben, in welchen noch mehrere vorkommen. Die Auflösung, welche für die Aufgabe des §. 30. gegeben ist, nimmt hierauf nicht Rücksicht, sie befriedigt also nicht, wenn der Zeiger unnütze Complexionen zuläſst und diese doch übergangen werden sollen. Es muſs also noch die Aufgabe aufgelöset werden, die *m*te Combinationsklasse zur Summe *n* für einen Zeiger zu finden, für den es solche unnütze Complexionen giebt. Ihre Auflösung ist leicht, sobald man weiſs wie die erste Complexion dieser *m*ten Klasse zur Summe *n* d. h. wie die gefunden wird, welche als Zahl betrachtet die kleinste unter allen Complexionen dieser Klasse ist; aus diesem Grunde

a) Disquisitiones Analyticae, auctore I. F. Pfaff. pag. 278. Ich habe diese Schrift schon pag. 31 genannt, ich darf nicht unterlassen auf die trefliche combinatorisch-analytische Abhandlung überhaupt aufmerksam zu machen, welche ihr zweites Kapitel über die Umkehrung der Reihen ausmacht.

Grunde ist ihr die Aufgabe des folgenden Paragraphs vorangeschickt und sie selbst erst in §. 33. aufgestellt. Um die beiden Aufgaben unter der Form, wie sie am genannten Orte gegeben sind, verstehn zu können, hat man dieses zu bemerken.

Wenn die *m*te Klasse zur Summe *n* nach einer der Auflösungen in §. 30. entwickelt wird, so besteht die erste Complexion derselben aus m—1 Einsen und ausserdem noch aus einem rechts daneben geschriebenen Elemente, dessen Zeigerzahl das Supplement von m—1 zu *n* ist. Ist also im Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3 \ldots \varrho}{a,\ b,\ c \ldots r}$, ϱ wenigstens gleich diesem Supplemente, folglich wenigstens gleich $n-(m-1) = n-m+1$, so kann auch $\overset{n}{\mathfrak{M}}\binom{1,\ 2,\ 3 \ldots \varrho}{a,\ b,\ c \ldots r}$ durch eine der gedachten Auflösungen gefunden werden, nicht aber wenn $\varrho < n-m+1$ ist. In dem Falle aber, dass $\varrho < n-m+1$ ist, muss doch $m\varrho$ wenigstens gleich *n* seyn; denn wenn das höchste Element ϱ, *m* mal gedacht noch nicht *n* gäbe, so wäre auch für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3 \ldots \varrho}{a,\ b,\ c,\ldots r}$ keine *m*te Klasse zur Summe *n* möglich.

§. 32.

Aufgabe. a).

Es soll die erste Complexion der *m*ten Klasse zur Summe *n* für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3 \ldots \varrho}{a,\ b,\ c \ldots r}$ gefunden werden, in welchem zwar $\varrho < n-m+1$ aber $m\varrho > n$ ist.

Arith-

a) Von dieser Aufgabe wird sich schwerlich eine rein combinatorische Auflösung geben lassen, weil ihre Bedingungen sie mehr zu einer arithmetischen als combinatorischen Aufgabe machen.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

1) Man dividire $\varrho m - n$ durch $\varrho - 1$ und wenn dies nicht möglich ist, weil $\varrho m - n > \varrho - 1$, so dividire man durch $\varrho - 2$ und geht auch dies nicht an so nehme man $\varrho - 3$ zum Divisor u. s. w. und wenn eine solche Division die ganze Zahl π ohne Rest giebt, so schreibe man, nachdem der Divisor $\varrho - 1$, $\varrho - 2$, $\varrho - 3$ u. s. f. $\varrho - \mu$ war, π Einsen, π Zweien, π Dreien u. s. w. π μen neben einander und lasse auf diese noch rechts hin so viele ϱ folgen, bis man eine Complexion der *m*ten Klasse hat.

2) Sollte eine der angegebenen Divisionen die ganze Zahl π geben aber noch einen Rest lassen, so muss man neben die zuerst hingeschriebenen μen noch eine 2, 3, 4. u. s. f. ν setzen, nachdem der Rest gleich $\varrho - 2$, oder gleich $\varrho - 3$ u. s. f. gleich $\varrho - \nu$ ist und erst neben diese hingesetzte Zifer so oft ϱ schreiben als nöthig ist um eine Mtion zu erhalten.

Beweis.

Schreibt man *m* ϱen neben einander, so hat man eine Complexion der *m*ten Klasse. Die Summe der Elemente dieser Complexion ist gleich dem Produkte ϱm; ist also ϱm grösser als *n*, so muss man die Summe ihrer Elemente um so viel kleiner machen als der Überschuss $\varrho m - n$ beträgt. Diese Verringerung der Summe geschieht aber, wenn man die einzelnen Elemente der Complexion kleiner macht und da sie als Zahl betrachtet die kleinste gutgeordnete zur Summe *n* seyn muss die für den Zeiger $\binom{1, 2, 3 \ldots \varrho}{a, b, c \ldots r}$ statt findet, so erhellet zugleich, dass man mit der Verkleinerung ihrer Elemente bei dem ersten zur Linken anfangen und diese so vornehmen muss, dass man ein jedes Element um so viel verkleinert als möglich ist. Man muss also untersuchen ob nicht

 die

die Complexion sich mit Einsen, oder wenn dies nicht angeht mit Zweien anfangen kann u. s. w. und wie viele Elemente solche Einsen, Zweien u. s. f, seyn können.

1) Die gröfste Zahl um welche man die einzelnen Elemente der gedachten Complexion verkleinern darf ist $\varrho - 1$, die nächstkleinere ist $\varrho - 2$, hierauf $\varrho - 3$ u. s. w. weil $\varrho - (\varrho - 1) = 1$, $\varrho - (\varrho - 2) = 2$, $\varrho - (\varrho - 3) = 3$ ist u. s. w. und dem Zeiger gemäfs, das geringste Element, womit sich die Complexion anfangen kann, 1 ist. Ist der Überschufs $\varrho m - n$ gröfser als $\varrho - 1$, so kann auch von den ersten einzelnen Elementen, $\varrho - 1$ subtrahirt werden; ist $\varrho m - n > \varrho - 1$ aber $< \varrho - 2$, so läfst sich nicht $\varrho - 1$ aber $\varrho - 2$ subtrahiren. Sollte $\varrho m - n$ kleiner als $\varrho - 1$ auch wie $\varrho - 2$ aber gröfser als $\varrho - 3$ seyn, so fände die Subtraction der $\varrho - 1$ und $\varrho - 2$ nicht statt aber die der $\varrho - 3$ u. s. f. Gesetzt nun es wäre die gröfste Zahl um welche die einzelnen Elemente verkleinert werden könnten gleich $\varrho - \mu$ und man wollte wissen von wie vielen Elementen diese Zahl abgezogen werden, also wie viele Elemente gleich $\varrho - (\varrho - \mu) = \mu$ seyn dürften, so würde man dies offenbar erfahren, wenn man untersuchte, wie oft der Überschufs $\varrho m - n$ die Zahl $\varrho - \mu$ in sich begriffe, also wie grofs der Quotient $\frac{\varrho m - n}{\varrho - \mu}$ wäre. Giebt also $\varrho m - n$ durch $\varrho - \mu$ dividirt die ganze Zahl π, so mufs auch die gesuchte Complexion sich mit π μen anfangen und die übrigen Elemente können nur ϱen seyn. (*Auflösung* 1))

2) Gäbe die Division des $\varrho m - n$ durch $\varrho - \mu$ die ganze Zahl π und liefse einen gewissen Rest, der also höchstens $\varrho - 2$ seyn könnte, so erhielte man dadurch noch nicht die verlangte Complexion zur Summe n, dafs man π mal, μ hinschriebe und daneben noch $m - \pi$ mal das Element ϱ setzte, weil die Summe der hierdurch erhaltenen Complexion gewifs um gedachten Rest gröfser als n wäre, es müfste daher dieser von dem ersten ϱ, neben dem

dem letzten μ, noch ſubtrahirt werden. Iſt alſo der Reſt gleich $\varrho-\nu$, ſo muſs neben der letzten μ noch $\varrho-(\varrho-\nu)=\nu$ ſtehn, und folglich bekömmt man hier die verlangte gutgeordnete Complexion, wenn man π μen neben einander ſchreibt, neben dieſe noch das Element ν ſetzt und hierauf ſo viele ϱen folgen läſst, bis man eine Complexion von m Elementen hat. (*Auflöſung*, 2,).

Beiſpiele.

1) Es wird für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\\ a, & b, & c, & d, & e, & f\end{matrix}\right)$ die erſte oder als Zahl die kleinſte Complexion von $^{28}\mathrm{H}$ verlangt.

Hier iſt $m=8$, $\varrho=6$, $n=28$, alſo $\frac{\varrho m-n}{\varrho-1}=4$; folglich iſt die geſuchte Complexion gleich $11116666=$ aaaaffff.

2) Es ſoll für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\\ a, & b, & c, & d, & e, & f\end{matrix}\right)$ die erſte Complexion der $^{40}\mathrm{H}$ angegeben werden.

Hier iſt $m=8$, $\varrho=6$, $n=40$, alſo $\frac{\varrho m-n}{\varrho-1}=1\frac{3}{5}$. Der Reſt 3 iſt gröſser als $\varrho-2$ aber gleich $\varrho-3$, folglich iſt die verlangte Complexion gleich $13666666=$ acffffff.

3) Man verlangt die erſte Complexion der 11ten Klaſſe zur Summe 30 für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ a, & b, & c, & d, & e\end{matrix}\right)$.

Hier iſt $m=11$, $\varrho=5$, $n=30$, alſo $\frac{\varrho m-n}{\varrho-1}=6\frac{1}{4}$. Der Reſt 1 iſt kleiner als $\varrho-1$, $\varrho-2$, und $\varrho-3$ aber gleich $\varrho-4$, daher iſt die zu beſtimmende Complexion gleich $11111145555=$ aaaaaadeeee.

§. 33.

Aufgabe.

Es ſoll ${}^{n}\mathfrak{M}\binom{1,\ 2,\ 3\ldots\varrho}{a,\ b,\ c\ldots\nu}$ dargeſtellt werden, wobei angenommen wird, daſs $\varrho < n - m + 1$, aber $\varrho m > n$ iſt.

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

Man ſuche nach §. 32. die erſte Complexion, betrachte dieſe als eine Zahl und leite aus ihr ſucceſſiv nach des §. 6. 17ten Satze und deſſen Anmerkung unter der Bedingung alle gröſsern Zahlen her, daſs ϱ die höchſte Zifer derſelben ſeyn ſoll. Um die Buchſtabencomplexionen zu erhalten ſubſtituire man für die Elemente der gefundenen Zahlencomplexionen die mit ihnen correſpondirenden Buchſtaben.

Beweis.

Man geht hier von der kleinſten gutgeordneten Zahl zur Summe n aus, die für die Zifern 1, 2, 3, . . . ϱ möglich iſt und folgert aus dieſer die gröſsern gutgeordneten Zahlen nach einer Regel, welche nicht zuläſst, daſs eine übergangen wird, die für die gegebenen Bedingungen der Aufgabe ſtatt findet, folglich erhält man auch durch die Auflöſung alle verlangte Zahlencomplexionen und daher muſs die vorgeſchriebene Subſtitution der Buchſtaben auch alle Buchſtabencomplexionen geben.

Beispiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g}$

	11147	aaadg	
	11156	aaaef	
	11237	aabcg	
	11246	aabdf	
	11255	aabee	
	11336	aaccf	
	11345	aacde	
	11444	aaddd	
^{14}E	12227	abbbg	^{14}E
	12236	abbcf	
	12245	abbde	
	12335	abcce	
	12344	abcdd	
	13334	acccd	
	22226	bbbbf	
	22235	bbbce	
	22244	bbbdd	
	22334	bbccd	
	23333	bcccc	

§. 34.

Anmerkung.

Die Anzahl der Complexionen der Combinationen zu bestimmten Summen mit Wiederholungen, sowohl für einzelne als alle Klassen insgesammt zu berechnen, lehrt die der Combinationslehre angehängte zweite Tabelle. *a*).

H 4 δ. Von

a) Diese ist aus Hindenburgs Schrift genommen: Infinitinomii Dignitatum Exponentis indeterminati Historia, Leges ac Formulae pag. 170. Sie ist ein Theil der grössern Eulerschen Tafel: Nov. comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. III. pag. 165—169.

Mit der Berechnung der Anzahl der Combinationen zu bestimmten Summen beschäftigt sich Euler in dem 16ten Kapitel des ersten Theils seiner Introd. ad Analysin Infinit und noch ausführlicher in der vorhin genannten Schrift Ac. Sc. Petrop. T. III. pag. 125 et seq.

δ. Von den Combinationen zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen.

§. 35.

Aufgabe.

Es werden für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ \nu}{a,\ b,\ c,\ d\ \ldots\ n}$ alle Combinationen ohne Wiederholungen zur Summe ν verlangt.

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man setze ν hin, so hat man $^{\nu}\mathrm{A}^{\backprime}$.

2) Wenn ν nicht das zweite Element des Zeigers ist, (a) so schreibe man vor das Element, welches im Zeiger dem ν zunächst vorhergeht das erste Element des Zeigers, so erhält man die erste Complexion der zweiten Klasse. Aus dieser leite man die zweite, aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Complexion u. s. f. der nämlichen Klasse her, indem man jedesmal das erste Element der zuletzt gefundenen Complexion in das nächstfolgende und ihr letztes Element in das nächstvorhergehende des Zeigers verwandelt, bis man auf eine Binion kömmt, deren zweites Element im Zeiger zunächst auf ihr erstes Element folgt, oder zwischen deren beiden Elementen sich im Zeiger nur ein Element befindet,

3) Aus der zweiten Klasse leite man die dritte, aus der dritten die vierte ab u. s. f. nach folgenden allgemeinen Regeln;

α) Es

(a) Wenn ν das zweite Element des Zeigers ist, sich also auf 2 bezieht, so findet hier ausser der ersten weiter keine Klasse statt.

α) Es wird allen Complexionen der nächst vorher gehenden Klasse, die nicht das erste Element des Zeigers zum Anfangselemente haben und die sich mit zwei Elementen endigen, zwischen welchen im Zeiger wenigstens noch ein Element liegt, das erste Element des Zeigers vorgesetzt und ihr letztes Element in das ihm nächstvorhergehende des Zeigers verwandelt. Dies giebt Complexionen der Ordnung des ersten Elements des Zeigers.

β) Unter den hierdurch gefundenen Complexionen werden die aufgesucht, welche sich mit zwei Elementen anfangen und endigen, zwischen denen sich im Zeiger wenigstens ein Element befindet und in diesen wird für das erste Element das nächstfolgende und für das letzte das nächstvorhergehende des Zeigers substituirt. Dies giebt Complexionen der Ordnung des zweiten Elements des Zeigers.

γ) Nach der nämlichen Vorschrift, nach welcher man aus den Complexionen der Ordnung des ersten Elements die der Ordnung des zweiten Elements gefolgert hat, leite man aus denen der Ordnung des zweiten Elements des Zeigers wieder die der Ordnung des dritten Elements und aus diesen wieder die der Ordnung des vierten Elements her u. s. w. bis man auf Complexionen einer gewissen Ordnung kömmt auf welche diese Vorschrift nicht mehr angewandt werden kann. Diese Complexionen sind dann die letzten der gesuchten Klasse.

Beweis.

Die Auflösung kann nur gutgeordnete Complexionen zur Summe ν geben, dies erhellet aus ihrem vorgeschriebenen Verfahren hinreichend und eben so wenig bedarf es eines Beweises, daſs durch ihre zweite Vor-

schrift keine Binionen mit Wiederholungen und daher auch durch ihre dritte Vorschrift keine Complexionen mit Wiederholungen entstehn können, dass also die Auflösung gewiss nur Combinationen ohne Wiederholungen giebt. Man erhält aber durch sie auch alle Combinationen ohne Wiederholungen zur Summe ν; denn in der zweiten Klasse kann keine fehlen, weil dieses den Mangel derjenigen wieder voraussetzen würde, die man aus der fehlenden bekömmt, wenn man ihr erstes Element in das nächstvorhergehende und das letzte in das nächstfolgende des Zeigers verwandelt. Fehlte aber diese, so würde dies den Mangel einer andern erfordern, welche aus ihr auf die nämliche Weise gemacht werden kann und es ist klar dass sich dieses Raisonnement so weit fortsetzten läfst bis man gezeigt hat, dass auch die übergangen seyn müsste aus welcher, auf die angegebene Weise, weiter keine Binion hergeleitet werden könnte. Da nun diese die zuerst hingeschriebene Binion ist, also gewiss nicht fehlt, so ist einleuchtend dass auch irgend eine andere nicht fehlen kann.

Ist dieses aber der Fall, so kann auch in irgend einer der folgenden Klassen keine Complexion übergangen werden, weil der Mangel einer Complexion eines höhern Exponenten als die Binion hat, voraussetzt, dass eine Binion verfehlt ist. Es läfst sich nämlich aus einer jeden Ntion, wenn sie sich nicht mit dem ersten Elemente des Zeigers anfängt, auf die Weise wie bei den Binionen angegeben ist, eine vorhergehende Ntion machen, aus dieser wieder eine andere u. s. f. bis man auf eine solche kömmt deren erstes Element das erste des Zeigers ist. Fehlte also irgend eine Ntion, die nicht das erste Element des Zeigers zum Anfangselemente hat, so müsste auch eine solche fehlen, deren Anfangselement das erste des Zeigers ist. Aus dieser läfst sich aber dadurch die N—1tion machen, aus welcher sie nach der Auflösung entstehn würde, dass man ihr das erste Element nimmt und für ihr letztes

letztes das nächſtfolgende des Zeigers ſubſtituirt, folglich iſt einleuchtend, daſs der Mangel irgend einer Ntion den einer N—1tion bedingt, und daſs daher keine Complexion irgend einer ſpätern Klaſſe, als die zweite iſt, übergangen werden kann wofern nicht eine Binion übergangen iſt. Denn nach dieſem Raiſonnement folgt z. B. aus dem Mangel einer Quaternion wieder der Mangel einer Ternion und hieraus wieder der einer Binion.

Beiſpiele.

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ 12,\ 13}{a,\ b,\ c,\ d\ \ldots\ m,\ n}$$

13	$^{13}A'$	n	$^{13}A'$
1 12		a m	
2 11		b l	
3 10	$^{13}B'$	c k	$^{13}B'$
4 9		d i	
5 8		e h	
6 7		f g	
1 2 10		a b k	
1 3 9		a c i	
1 4 8	$^{13}C'$	a d h	$^{13}C'$
1 5 7		a e g	
2 3 8		b c h	
2 4 7		b d g	
2 5 6		c d f	
3 4 6			
1 2 3 7	$^{13}D'$	a b c g	$^{13}D'$
1 2 4 6		a b d f	
1 3 4 5		a c d e	

1. *Anmerkung.*

Die Darſtellung welche die Auflöſung giebt, iſt keine Involution weil ſelbſt die erſten Erforderniſſe derſelben ihr fehlen. Wollte man ſie für eine Involution nehmen, ſo könnte ſie nur als eine ſehr unvollſtändige Klaſſeninvolution angeſehen werden.

2. *An-*

2. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöſung entſteht ſogleich aus der zweiten Auflöſung der Aufgabe des §. 29 wenn man dieſe dahin abändert daſs ſie keine Wiederholungen mehr geben kann. Für die dritte Auflöſung des §. 29 giebt es aber hier keine ähnliche.

Darſtellung einzelner Klaſſen der Combinationen ohne Wiederholungen zu beſtimmten Summen.

§. 36.

Aufgabe.

Es wird die mte Klaſſe zur Summe ν für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3. & 4, & 5, & 6 & .. & \nu \\ a, & b, & c, & d, & e, & f & .. & n\end{matrix}\right)$ verlangt,

Auflöſung.

1) Man ſuche im Zeiger von der Rechten nach der Linken das Element auf, welches von dem vorletzten angerechnet das $\frac{m \cdot m-1}{2}$ te iſt.

2 Dieſem ſetze man das m—1te Element des Zeigers vor, ſo hat man eine Binion. Das erſte Element dieſer Binion verwandele man in das nächſtfolgende und das letzte Element in das nächſtvorhergehende des Zeigers. Eben ſo verfahre man wieder mit der jetzt erhaltenen Binion und ſetze dies fort bis man dadurch eine Binion bekömmt, deren zwei Elemente entweder zwei zunächſt auf einander folgende des Zeigers ſind oder zwiſchen welchen ſich im Zeiger nur e i n Element befindet.

3) Den ſämmtlichen Binionen ſchreibe man das m—2te Element des Zeigers vor. Iſt es geſchehn, ſo ſuche man unter den hierdurch entſtandenen Ternionen die auf, welche ſich weder mit zwei zunächſt auf einander

ander folgenden Elementen anfangen noch endigen und setze für ihr erstes Element das nächstfolgende und für ihr letztes das nächstvorhergehende des Zeigers. Auf die nämliche Weise leite man aus den jetzt gefundenen Ternionen wieder andere her und fahre hiermit überhaupt so lange fort bis man auf Ternionen einer gewissen Ordnung kömmt, auf welche diese Regel nicht weiter anzuwenden ist.

4) Vor alle Ternionen setze man das m—3te Element des Zeigers und folgere aus den Quaternionen, die hierdurch entstehn wieder eben so andere, wie man aus den Ternionen der Ordnung des m—2ten Elements die übrigen herleitet.

5) Die Vorschriften 3) und 4) wende man mit gehöriger Veränderung wieder an um aus den gefundenen Quaternionen Quinionen zu folgern und wiederhole überhaupt diese Operation so lange bis man alle durch sie zu findende M—1tionen bekommen und aus diesen die Mtionen hergeleitet hat.

Beweis.

1) Es ist klar, dass alle erhaltene Mtionen einerlei Summe haben, weil den construirten Binionen einerlei Summe zukömmt, und daher auch den hieraus abgeleiteten Ternionen u. s. f.; hat also die erste Mtion die verlangte Summe ν, so haben auch die übrigen Mtionen diese Summe. Dass aber die erste Mtion die Summe ν hat, erhellet so: Das vorletzte Element des Zeigers hat die Summe $\nu-1$, das nach der Linken hin auf dieses folgende besitzt die Summe $\nu-2$, das diesem folgende Element des Zeigers, hat die Summe $\nu-3$ u. s. w. so dass also das Element, welches von dem vorletzten des Zeigers nach der Linken gezählt das $\frac{m.m-1}{2}$te ist, gleich $\nu-\frac{m.m-1}{2}$ seyn muss. Dieses Element macht aber,

der

der Auflöfung gemäfs, mit den m—1 Elementen 1, 2, 3, 4.., m—1 die erfte Mtion aus, folglich mufs auch, da $1+2+3+4+..+m-1=\frac{m.m-1}{2}$ ift, die erfte Mtion die Summe $\nu-\frac{m.m-1}{2}+\frac{m.m-1}{2}$ $=\nu$ haben.

2) Die erfte Binion welche die Auflöfung giebt fängt fich mit dem m—1ten Elemente des Zeigers an und hat deswegen die Summe $m-1+\nu-\frac{m.m-1}{2}$

$$=\nu-\frac{m.m-1}{2}+m-1=\nu-\left(\frac{m.m-1}{2}-(m-1)\right)$$

$$=\nu-\left(\frac{m.(m-1)-2(m-1)}{2}\right)=\nu-\frac{(m-2)\,m-1}{2}.$$

Da dies der Fall ift, fo mufs auch die Auflöfung alle gefuchte Mtionen geben.

Es läfst fich nämlich eine jede der gefuchten Mtionen wenn fie fich nicht mit a anfängt dadurch, dafs man fucceffiv für ihr erftes Element das nächftvorhergehende und für ihr letztes das nächftfolgende des Zeigers fubftituirt auf eine gutgeordnete Mtion zur Summe ν ohne Wiederholungen reduciren, deren Anfangselement das erfte des Zeigers, alfo *a* ift. Nimmt man einer folchen das erfte Element, fo bekömmt man eine M—1tion zur Summe ν—1 die fich entweder mit *b* oder einem höhern Elemente des Zeigers anfängt, aus welcher die Auflöfung gedachte Mtion der Ordnung a und daher auch mittelbar die Ntion ableitet, welche fich auf diefe Mtion der Ordnung *a* auf angegebene Weife reduciren läfst. Ift das Anfangselement genannter M—1tion ein höheres als b, fo läfst fie fich auf eine M—1tion zur Summe ν—1 mit dem Anfangselemente *b* zurückführen, wenn man wieder mit ihrem erften und letzten Elemente die Subftitution vornimmt durch welche eine jede Mtion zur Summe ν,

wenn ſie ſich nicht mit a anfängt auf eine ſolche zurückgeführt wird. Es ſetzt alſo der Mangel irgend einer Mtion den einer M—1tion zur Summe ν—1 mit dem Anfangselemente b voraus. Wird dieſer M—1tion das Element b genommen, ſo bekömmt man eine M—2tion zur Summe ν—(1+2) die entweder c oder ein höheres Element des Zeigers zum Anfangselemente hat, aus welcher man alſo durch ein Vorſetzen des b die fehlende M—1tion der Ordnung b bekäme. Hat die M—2tion ein höheres Element als c iſt zum Anfangselemente, ſo kann man ſie wieder durch eine fortgeſetzte Verwandlung ihres erſten Elements in das nächſtvorhergehende und ihres letzten Elements in das nächſtfolgende des Zeigers auf eine M—2tion der nämlichen Summe mit dem Anfangselemente c reduciren. Das Fehlen einer M—2tion und daher auch der Mangel einer Mtion bedingt alſo, daſs man durh die Auflöſung eine gewiſſe M—2tion zur Summe ν—(1+2) mit dem Anfangselemente c nicht erhält. Hieraus erhellet ſchon daſs durch Fortſetzen dieſes Raiſonnement ſich zeigen läſst, daſs die Auflöſung nur dann eine verlangte Mtion nicht giebt wenn man durch ſie eine gutgeordnete M—2tion ohne Wiederholungen zur Summe ν—(1+2+3+..m—2) die ſich mit dem m—1ten Elemente des Zeigers anfängt d. h. eine Combinationsbinion ohne Wiederholungen zur Summe $\nu - \frac{(m-2)(m-1)}{2}$ mit dem genannten Anfangselemente nicht bekömmt. Da man nun dieſe aber gewiſs nicht übergeht, ſo iſt auch einleuchtend, daſs die Auflöſung alle verlangte Mtionen geben muſs.

Beispiele.

$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots & 10, & 11, & 12 \ldots & 22 \\ a, & b, & c, & d, & e \ldots & k, & l & m \ldots & w \end{pmatrix}$

$^{22}E'$	1	2	3	4	12	a	b	c	d	m	$^{22}E'$
	1	2	3	5	11	a	b	c	e	l	
	1	2	3	6	10	a	b	c	f	k	
	1	2	3	7	9	a	b	c	g	i	
	1	2	4	5	10	a	b	d	e	k	
	1	2	4	6	9	a	b	d	f	i	
	1	2	4	7	8	a	b	d	g	h	
	1	2	5	6	8	a	b	e	f	h	
	1	3	4	5	9	a	c	d	e	i	
	1	3	4	6	8	a	c	d	f	h	
	1	3	5	6	7	a	c	e	f	g	
	2	3	4	5	8	b	c	d	e	h	
	2	3	4	6	7	b	c	d	f	g	

Anmerkung.

Aus der Methode der Auflöſung, das Verlangte darzuſtellen, erhellet daſs ſie involutoriſch iſt. Sie giebt aber, wie man ſchon aus den beiden Beiſpielen ſieht, keine vollſtändige Involutionen.

§. 37.

Anmerkung.

Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen zu beſtimmten Summen läſst ſich für jede einzelne Klaſſe alſo auch für alle Klaſſen insgeſammt, durch die in §. 33. angeführte Tabelle leicht berechnen.

s. Von dem Combiniren mehrerer Reihen.

§. 38.

Erklärung.

Das Combiniren mehrerer Reihen beſteht darinn, daſs man mehrere in Rückſicht auf ihre Glieder

ver-

verschiedene Elementenreihen auf eine und dieselbe Zahlenreihe bezieht, wie bisher die Reihe a, b, c, d . . . auf die Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 . . . bezogen ist und dass man, anstatt die Combinationen, welche eine gewisse Aufgabe verlangt, bloss aus den Elementen einer und derselben Reihe zu bilden, die Unionen aus der ersten Reihe hebt; die Elemente welche diesen vorgesetzt werden, um die Binionen zu bekommen, aus der zweiten Reihe; die Elemente welche diesen vorgeschrieben werden um die Ternionen zu erhalten aus der dritten Reihe nimmt u. s. w. und zwar so, dass man jedesmal das Element einer Reihe zum Vorsetzen gebraucht, dessen Zeigerzahl mit derjenigen des Elements der ersten Reihe übereinstimmt, welches man würde dazu genommen haben, wenn die Combinationen bloss aus den Elementen dieser ersten Reihe hätten gebildet werden sollen.

Zusatz.

Es finden bei dem Combiniren mehrerer Reihen alle Aufgaben statt, welche für das Combiniren der Elemente einer einzigen Reihe gelten und man weiss für eine Aufgabe die Combinationen mehrerer Reihen zu finden, so bald man diese für eine einzige Reihe zu finden weiss.

Anmerkung.

Es bedürfen also die Aufgaben für das Combiniren mehrerer Reihen keiner eigenen Auflösung, sondern es kommen ihnen die nämlichen zu, welche für die Aufgaben in Rücksicht auf eine und dieselbe Elementenreihe gegeben sind, nur mit dem Unterschiede, dass man bei mehreren Reihen, die Elemente, welche zum Vorsetzen gebraucht werden, aus der zweiten, dritten Reihe u. s. w. nehmen muss, wie in der Erklärung bestimmt ist. Aus diesem Grunde sollen für die Combinationen mehrerer Reihen die Aufgaben zwar aufgestellt aber statt der Auf-

 lösung

löſung ſoll nur die Darſtellung hingeſetzt werden, die man durch die Auflöſung erhalten würde.

1. *Willkührlicher Satz.*

Die einzelnen Elemente jeder Reihe bezeichnet man wie gewöhnlich mit Buchſtaben, wie dieſe im Alphabethe auf einander folgen, bedient ſich aber hierzu für eine jede Reihe eines eigenen Alphabeths. Zur Bezeichnung ganzer Reihen gebraucht man die einzelnen Buchſtaben, p, q, r, s, u. ſ. f.; π, ϱ, σ u. ſ. w. Dies giebt die Zeiger:

$$\left\{\begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \ldots & \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q \end{matrix}\right\}
\quad
\left\{\begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \ldots & \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots = r \end{matrix}\right\},
\quad
\left\{\begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \ldots & \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots = r \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots = s \end{matrix}\right\}$$

u. ſ. w.

2. *Willkührlicher Satz.*

Die Zeichen für die Combinationsklaſſen mehrerer Reihen ſind die gewöhnlichen, nur daſs man noch die Zeichen der Reihen, worauf ſich die Klaſſen beziehn in der Ordnung darüber ſchreibt, daſs r vor q, q vor p geſetzt wird u. ſ. w. wenn in den Species der Klaſſen die Elemente der Reihe r vor den Elementen der Reihe q ſtehn u. ſ. w. z. B. $\overset{q}{A}$, $\overset{qp}{B}$, $\overset{rqp}{C}$, u. ſ. f.

Combinationen überhaupt.

§. 39.

Aufgabe.

Es werden für den hierunter befindlichen Zeiger die Combinationen mit Wiederholungen verlangt.

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots & \\ a, & b, & c, & d = p \\ A, & B, & C, & D = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D} = s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right\}$$

Auf-

Auflösungen.

1)

a	b	c	d	
Aa	Ab	Ac	Ad	p A
	Bb	Bc	Bd	qp B
		Cc	Cd	
			Dd	
𝔞Aa	𝔞Ab	𝔞Ac	𝔞Ad	
	𝔞Bb	𝔞Bc	𝔞Bd	
		𝔞Cc	𝔞Cd	rqp C
			𝔞Dd	
	𝔟Bb	𝔟Bc	𝔟Bd	
		𝔟Cc	𝔟Cd	
			𝔟Dd	
		𝔠Cc	𝔠Cd	
			𝔠Dd	
			𝔡Dd	
𝔄𝔞Aa	𝔄𝔞Ab	𝔄𝔞Ac	𝔄𝔞Ad	
	𝔄𝔞Bb	𝔄𝔞Bc	𝔄𝔞Bd	srqp D
		𝔄𝔞Cc	𝔄𝔞Cd	
			𝔄𝔞Dd	
	𝔄𝔟Bb	𝔄𝔟Bc	𝔄𝔟Bd	
		𝔄𝔟Cc	𝔄𝔟Cd	
			𝔄𝔟Dd	

u. s. w.

vide pag. 55.

2)

𝔄 𝔞 A a
𝔄 𝔞 A b
𝔄 𝔞 A c
𝔄 𝔞 A d — p A
𝔄 𝔞 B b
𝔄 𝔞 B c
𝔄 𝔞 B d
𝔄 𝔞 C c
𝔄 𝔞 C d
𝔄 𝔞 D d — qp B
𝔄 𝔟 B b
𝔄 𝔟 B c
𝔄 𝔟 B d
𝔄 𝔟 C c
𝔄 𝔟 C d
𝔄 𝔟 D d
𝔄 𝔠 C c
𝔄 𝔠 C d
𝔄 𝔠 D d — rqp C
𝔄 𝔡 D d
𝔅 𝔟 B b

u. s. w.

vide pag. 60.

2. *Aufgabe.*

Es sollen für den Zeiger der ersten Aufgabe die Combinationen ohne Wiederholungen angegeben werden.

Auflösungen.

1)

a	b	c	d	
	Ab	Ac	Ad	p A
		Bc	Bd	qp B
			Cd	
		𝔞Bc	𝔞Bd	rqp C
			𝔞Cd	
			𝔟Cd	
			𝔄𝔟Cd	srqp D

pag. 73.

2)

A b — p A, qp B
A c
A d — rqp C
𝔞 B c
𝔞 B d
𝔞 C d
𝔄 𝔟 C d — srqp D

pag. 76.

3. *Auf-*

3. *Aufgabe.*

Es soll für den hierunter stehenden Zeiger die fünfte Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen dargestellt werden.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7		
a,	b,	c.	d,	e,	f,	g	=	p
A,	B,	C,	D,	E,	F,	G	=	q
𝔞,	𝔟,	𝔠,	𝔡,	𝔢,	𝔣,	𝔤	=	r
𝔄,	𝔅,	ℭ,	𝔇,	𝔈,	𝔉,	𝔊	=	s
α,	β,	γ,	δ,	ε,	ζ,	η	=	π

Auflösungen.

1)

πsrqp F'

α	𝔅	𝔠	D	e
α	𝔅	𝔠	D	f
α	𝔅	𝔠	D	g
α	𝔅	𝔠	E	f
α	𝔅	𝔠	E	g
α	𝔅	𝔠	F	g
α	𝔅	𝔡	E	f
α	𝔅	𝔡	E	g
α	𝔅	𝔡	F	g
α	𝔅	𝔢	F	g
α	ℭ	𝔡	E	f
α	ℭ	𝔡	E	g
α	ℭ	𝔡	F	g
α	ℭ	𝔢	F	g
α	𝔇	𝔢	F	g
β	ℭ	𝔡	E	f
β	ℭ	𝔡	E	g
β	ℭ	𝔡	F	g
β	ℭ	𝔢	F	g
β	𝔇	𝔢	F	g
γ	𝔇	𝔢	F	g

pag. 82.

2)

πsrqp F'

α	𝔅	𝔠	D	e
α	𝔅	𝔠	D	f
α	𝔅	𝔠	D	g
α	𝔅	𝔠	E	f
α	𝔅	𝔠	E	g
α	𝔅	𝔠	F	g
α	𝔅	𝔡	E	f
α	𝔅	𝔡	E	g
α	𝔅	𝔡	F	g
α	𝔅	𝔢	F	g
α	ℭ	𝔡	E	f
α	ℭ	𝔡	E	g
α	ℭ	𝔡	F	g
α	ℭ	𝔢	F	g
α	𝔇	𝔢	F	g
β	ℭ	𝔡	E	f
β	ℭ	𝔡	E	g
β	ℭ	𝔡	F	g
β	ℭ	𝔢	F	g
β	𝔇	𝔢	F	g
γ	𝔇	𝔢	F	g

pag. 84.

Com-

Combinationen zu bestimmten Summen.

§. 40.

1. *Aufgabe.*

Es wird die Entwickelung der Combinationen mit Wiederholungen zur Summe 5, für hierunter befindlichen Zeiger verlangt.

$$\left|\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \\ a,\ b,\ c,\ d,\ e = p \\ A,\ B,\ C,\ D,\ E = q \\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e} = r \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E} = s \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon = t \end{array}\right|$$

Auflösungen.

1)

$$e \quad {}^5\overset{p}{A}$$
$$\overline{A\,d},\ B\,c \quad {}^5\overset{qp}{B}$$
$$\mathfrak{a}\,A\,c,\ \mathfrak{a}\,B\,b \quad {}^5\overset{rqp}{C}$$
$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,A\,b \quad {}^5\overset{srqp}{D}$$
$$\alpha\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,A\,a \quad {}^5\overset{tsrqp}{E}$$

pag. 87.

2)

$$\left|\begin{array}{l} \alpha \\ \mathfrak{A} \\ \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \\ A \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{a} \\ A \\ B \\ d \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \mathfrak{a} \\ A \\ c \\ b \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} A \\ b \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} a \end{array}\right.$$
$$(B\ \ c$$
$$(C$$

pag. 93.

Anmerkung.

Bei der zweiten Darstellung ist für das Vorschreiben des ersten Elements, um aus den Complexionen zur nächstvorhergehenden Summe, die Complexionen der Ordnung des ersten Elements des Zeigers zur nächstfolgenden grössern Summe zu erhalten, diese Vorschrift zu beobachten, dass man jedesmal das erste Ele-

ment derjenigen Reihe dazu nehmen muſs, welche im Zeiger zunächſt auf *die* folgt, zu welcher das erſte Element der Complexion gehört, vor die das erſte Element des Zeigers geſetzt werden ſoll.

2. *Aufgabe.*

Die dritte Klaſſe der Combinationen mit Wiederholungen zur Summe 12, darzuſtellen.

Zeiger.

1,	2,	5,	4,	5,	6,	7,	8,	9	. ,	
a,	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i	. .	= p
A,	B,	C,	D,	E,	F,	G,	H,	I	. .	= q
𝔞,	𝔟,	𝔠,	𝔡,	𝔢,	𝔣,	𝔤,	𝔥,	𝔦	, .	= r
𝔄,	𝔅,	ℭ,	𝔇,	𝔈,	𝔉,	𝔊,	ℌ,	ℑ	. .	= s

Auflöſung.

$^{12}D^{srqp}$

𝔄	𝔞	A	i
𝔄	𝔞	B	h
𝔄	𝔞	C	g
𝔄	𝔞	D	f
𝔄	𝔞	E	e
𝔄	𝔟	B	g
𝔄	𝔟	C	f
𝔄	𝔟	D	e
𝔄	𝔠	C	e
𝔄	𝔠	D	d
𝔅	𝔟	B	f
𝔅	𝔟	C	e
𝔅	𝔟	D	d
𝔅	𝔠	C	d
ℭ	𝔠	C	c

pag. 109.

3. *Aufgabe.*

Für den Zeiger der zweiten Aufgabe die Combinationen *ohne* Wiederholungen zur Summe 13, zu entwickeln.

Auf-

Auflösung.

$$n \qquad {}^{13}\overset{p}{A}{}'$$

A m	
B l	
C k	${}^{13}\overset{qp}{B}{}'$
D i	
E h	
F g	
a B k	
a C i	${}^{13}\overset{rqp}{C}{}'$
a D h	
a E g	
b C h	
b D g	
c D f	
𝔄 b C g	
𝔄 b D f	${}^{13}\overset{srqp}{D}{}'$
𝔄 c D e	

pag. 123.

4. Aufgabe.

Es soll die fünfte Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen zur Summe 22, dargestellt werden.

Zeiger.

1,	2,	3,	4,	5 ...	10,	11,	12 ..	22	
a,	b,	c,	d,	e ...	k,	l,	m ..	w	= p
A,	B,	C,	D,	E ...	K,	L,	M ..	W	= q
𝔞,	𝔟,	𝔠,	𝔡,	𝔢 ...	𝔨,	𝔩,	𝔪 ..	𝔴	= r
𝔄,	𝔅,	ℭ,	𝔇,	𝔈 ...	𝔎,	𝔏,	𝔐 ..	𝔚	= s
α,	β,	γ,	δ,	ε ...	$\varkappa$,	λ,	μ ..	χ	= π

Auflösung.

$^{22}D^{\pi s\tau c p}$

α	𝔅	c	D	m
α	𝔅	c	E	l
α	𝔅	c	F	k
α	𝔅	c	G	i
α	𝔅	d	E	k
α	𝔅	d	F	i
α	𝔅	d	G	h
α	𝔅	e	F	h
α	ℭ	d	E	i
α	ℭ	d	F	h
α	ℭ	e	F	g
β	ℭ	d	E	h
β	ℭ	d	F	g

pag. 128.

§. 41.

Anmerkung.

Bei dem Combiniren mehrerer verſchiedenen Reihen, kann keine Combination ein Element einer und derſelben Reihe öfter als *ein*mal enthalten, folglich fällt hier auch die Anwendung des Wiederholungsexponenten weg, und daher kann es hier auch keine Gleichungen geben, welche mit denjenigen für das Combiniren der Elemente *einer* Reihe correſpondirten, in welchen die Wiederholungsexponenten vorkommen. Hingegen alle übrige durch Klaſſen ausgedrückte Gleichungen, welche die Combinationen der Elemente *einer* Reihe geben, gelten mit gehörigen Veränderungen auch für die Combinationen mehrerer unter ſich verſchiedener Elementenreihen.

Z. B. für den hierunter befindlichen Zeiger in welcher π die *n*te Elementenreihe seyn mag, wird aus der Gleichung des ersten Zusatzes in §. 24., diese:

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\,.. \\ a,\ b,\ c,\ d\,..=p \\ A,\ B,\ C,\ D\,..=q \\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}\,..=r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\,..=\pi \end{array}\right\}$$

$$\overset{\pi..rqp}{'J} = \overset{p}{'A} + \overset{qp}{'B} + \overset{rqp}{'C} + \overset{srqp}{'D} + \ldots\ldots + \overset{\pi..rqp}{'\mathfrak{N}}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\,.. \\ a,\ b,\ c,\ d\,..=p \\ A,\ B,\ C,\ D\,..=q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\,..=\pi \end{array}\right\}$$

Das hier im allgemeinen gesagte wird es unnöthig machen die übrigen Gleichungen aufzustellen, welche noch für die Combinationen mehrerer Reihen statt finden,

5. Von den Variationen.

§. 42.

1. *Erklärung.*

Das Variiren wird eingetheilt in Variiren überhaupt und Variren zu bestimmten Summen.

2. *Erklärung.*

Variiren überhaupt heisst alle mögliche gutgeordnete und schlechtgeordnete Complexionen darstellen, welche für gewisse gegebene Elemente statt finden. Eine jede dieser Complexionen wird eine Variation genannt und der Inbegriff aller Variationen, die zu einer und derselben Klasse gehören macht eine Variationsklasse aus.

Das Zeichen des Variirens überhaupt

für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ ist: Vr $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ Spl. wo Vr, Variatio und Spl. wieder simplex bedeutet. (§. 23, 2. Erkl.)

Zusatz.

Die Combinationen mehrerer gegebener Elemente machen mit ihren Versetzungen alle Variationen dieser Elemente aus. (§. 23, 2. Erkl. Anmerk.)

3. *Erklärung.*

Wird beim Variren mehrerer Elemente so verfahren, als sey ein jedes derselben mehreremal, und wofern nichts darüber festgesetzt ist, unendliche mal gegeben, so variirt man mit Wiederholungen.

Das hierhergehörige Zeichen ist für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ dieses: Vr, $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ Spl. a. r.

Bedient man sich beim Variiren der eben gedachten Wiederholungen nicht, so variirt man ohne Wiederholungen.

Das Zeichen hierfür ist für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ dieses: Vr $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ Spl. o. r.

Man vergleiche hiermit pag. 52, 4. Erkl.

4. *Erklärung.*

Variiren zu einer bestimmten Summe, heisst für einen gegebenen Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ nicht alle sondern nur die Variationen darstellen, deren Elementensumme eine gewisse bestimmte ist.

Die

Die Zeichen hierfür ſind:

$$\mathrm{Vr.}\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}\,\mathrm{num.}\,n,\ a,\,r \text{ und } \mathrm{Vr.}\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots,}\,\mathrm{num.}\,n,\ o.\,r.$$

Man vergleiche hiermit pag. 52, 5. Erkl.

5. *Erklärung.*

Die einzelnen Variationscomplexionen zur Summe n, werden Variationszerfällungen der Zahl n genannt.

Willkührlicher Satz.

Die Zeichen für die Variationsklaſſen und Involutionen, ſind die nämlichen deren man ſich hierfür bei den Combinationen bedient, nur mit dem Unterſchiede, daſs man beim Variiren nicht dazu die gradeſtehende, ſondern die ſchiefſtehende Schrift gebraucht. So z. B. Bezeichnet man die erſte, zweite, dritte Klaſſe der Variationen überhaupt mit Wiederholungen, mit '*A*, '*B*, '*C*.

6. *Erklärung.*

Zum Variiren iſt entweder nur *eine* Elementenreihe oder es ſind mehrere dergleichen gegeben, die aber in Rückſicht auf ihre Elemente unter ſich verſchieden ſind.

Anmerkung.

Es bezieht ſich das bis jetzt vom Variiren geſagte zunächſt auf das Variiren der Elemente *einer* Reihe, daher auch dieſes zuerſt abgehandelt und das Variiren *mehrerer* Reihen unter der Überſchrift *von dem Variiren mehrerer Reihen* zuletzt beſonders vorgetragen wird.

*) Von

α) Von dem Variiren überhaupt mit Wiederholungen.

§. 43.

Aufgabe.

Für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ alle Variationen mit zugelaſſenen Wiederholungen zu finden.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe die Unionen 1, 2, 3, 4... in der Ordnung neben einander, wie ſie im Zeiger geordnet ſind, ſo hat man die erſte Klaſſe $('A)$ der Zahlenvariationen.

2) Aus $'A$ leite man $'B$, aus $'B$ wieder $'C$, aus $'C$ wieder $'D$ u. ſ. w. ab, wie in §. 7. aus den einzifrigen Zahlen die zweizifrigen aus dieſen die dreizifrigen hergeleitet werden u. ſ. w. und ſchreibe hierbei die zweite Klaſſe unter die erſte, die dritte unter die zweite u. ſ. f.

Die Subſtitution der Buchſtaben, für die mit ihnen correſpondirenden Elemente der gefundenen Zahlenvariationen, giebt die verlangten Buchſtaben-variationen.

Beweis.

Eine jede Variation der Zahlenelemente des Zeigers kann als eine Zahl angeſehen werden, folglich erhält man durch die gegebenen Vorſchriften gewiſs alle Zahlen-variationen, weil ſie alle mögliche Zahlen giebt, die ſich mit den gegebenen Zahlenelementen bei zugelaſſenen Wiederholungen ſchreiben laſſen und daher muſs auch die angegebene Subſtitution der Buchſtaben, alle Buchſtabenvariationen geben, weil eine jede derſelben mit einer Zahlenvariation correſpondirt.

Bei-

Beiſpiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4}{a,\ b,\ c,\ d}$

'A	1	2	3	4	a	b	c	d	'A
	11	12	13	14	aa	ab	ac	ad	
'B	21	22	23	24	ba	bb	bc	bd	'B
	31	32	33	34	ca	cb	cc	cd	
	41	42	43	44	da	db	dc	dd	
	111	112	113	114	aaa	aab	aac	aad	
	121	122	123	124	aba	abb	abc	abd	
	131	132	133	134	aca	acb	acc	acd	
	141	142	143	144	ada	adb	adc	add	
	211	212	213	214	baa	bab	bac	bad	
'C	"	"	"	"	"	"	"	"	'C
	241	242	243	244	bda	bdb	bdc	bdd	
	311	312	313	314	caa	cab	cac	cad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	341	342	343	344	cda	cdb	cdc	cdd	
	411	412	413	414	daa	dab	dac	dad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	441	442	443	444	dda	ddb	ddc	ddd	
	1111	1112	1113	1114	aaaa	aaab	aaac	aaad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	1441	1442	1443	1444	adda	addb	addc	addd	
	2111	2112	2113	2114	baaa	baab	baac	baad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
'D	2441	2442	2443	2444	bdda	bddb	bddc	bddd	'D
	3111	3112	3113	3114	caaa	caab	caac	caad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	3441	3442	3443	3444	cdda	cddb	cddc	cddd	
	4111	4112	4113	4114	daaa	daab	daac	daad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	4441	4442	4443	4444	ddda	dddb	dddc	dddd	
	u.	ſ.	w.		u.	ſ.	w.		

2.

α) *Rein combinatoriſche Auflöſung.*

1) Man ſchreibe die Elemente a, b, c, d, e . . . x, als Unionen in der Ordnung wie ſie jetzt genannt ſind neben einander, ſo hat man 'A

2)

2) Einer jeden Complexion der $'A$ ſetze man erſt a vor, ſo hat man die Binionen der Ordnung *a*; hierauf ſchreibe man vor jede Complexion der $'A$ das Element b, ſo bekömmt man die Binionen der Ordnung *b*; eben ſo ſuche man die Binionen der Ordnung *c*, der Ordnung *d* u. ſ. f. der Ordnung jedes der übrigen Elemente des Zeigers. Iſt dieſes geſchehn ſo hat man $'B$.

3) Auf die nämliche Weiſe, wie man $'B$ aus $'A$ erhält, leite man aus $'B$ wieder $'C$, aus $'C$ wieder $'D$, aus $'D$ wieder $'E$ her u. ſ. f.

Beweis.

Es iſt nicht möglich, daſs hier irgend eine gutgeordnete oder ſchlechtgeordnete Complexion übergangen werden kann, die ſich aus den Elementen a, b, c, d u. ſ. w. machen läſst, weil dies den Mangel einer der zuerſt hingeſchriebenen Unionen vorausſetzen würde. Denn geſetzt man erhielte durch die gegebenen Vorſchriften die Complexion aacbd nicht, ſo müſste man durch ſie auch nicht acbd, ferner cbd, bd und ſo auch d nicht erhalten,

Die zur erſten Auflöſung gegebenen Beiſpiele gehören auch hierher.

Anmerkung.

In den gegebenen beiden Beiſpielen laſſen ſich zwar die erſte und zweite Klaſſe der drei Elemente a, b, c, der zwei Elemente b und c und des einen Elements c aus der erſten und zweiten Klaſſe der Elemente a, b, c, und d leicht durch ein Linienziehn herausheben, für die übrigen Klaſſen iſt dies aber nicht der Fall. Es giebt alſo hier für die Variationen keine ſolche Involution, wie die

zweite

zweite Auflösung der Aufgabe des §. 24 für die Combinationen darstellt.

3.

β) *Rein combinatorische Auflösung.*

1) Man setze die gegebenen Elemente a, b, c, d u. s. w. in der Ordnung wie sie jetzt genannt sind unter einander, so hat man '*A*.

2) Sämmtlichen Unionen schreibe man *a* vor; dies giebt die Binionen der Ordnung *b*. Das erste Element jeder dieser Binionen verwandele man in das nächstfolgende des Zeigers, so erhält man die Binionen der Ordnung *c*. Auf dieselbe Weise folgere man hieraus die der Ordnung *d*, aus diesen wieder die der Ordnung *e* und setze dieses so lange fort, bis man alle Binionen der Ordnung des letzten Elements des Zeigers erhalten hat, welche nach dieser Vorschrift gefunden werden können. Sämmtliche gefundene Binionen machen '*B* aus.

3) Auf die nämliche Weise wie man '*B* aus '*A* abgeleitet hat, leite man wieder '*C* aus '*B*, '*D* aus '*C* her u. s, f.

Beweis.

Eine Vergleichung dieser zweiten rein combinatorischen Auflösung mit der ersten zeigt sogleich, dass beide nur einerlei Complexionen geben können, und dass daher die zweite Auflösung richtig ist, sobald es die erste ist.

Beiſpiele.

$\binom{1\ 2\ 3\ 4}{a\ b\ c\ d}$

1)

	a	a	a	a	
	a	a	a	b	
	a	a	a	c	
	a	a	a	d	'A
	a	a	b	a	
	a	a	b	b	
u.	a	a	b	c	
	a	a	b	d	
	a	a	c	a	
	a	a	c	b	
	a	a	c	c	
	a	a	c	d	
	a	a	d	a	
ſ.	a	a	d	b	
	a	a	d	c	
	a	a	d	d	'B
	a	b	a	a	
	"	"	"	"	
	a	b	d	d	
	a	c	a	a	
w.	"	"	"	"	
	a	c	d	d	
	a	d	a	a	
	"	"	"	"	
	a	d	d	d	'C
	b	a	a	a	

u. ſ. w.

2)

	1	1	1	1	
	1	1	1	2	
	1	1	1	3	
	1	1	1	4	'A
	1	1	2	1	
	1	1	2	2	
u.	1	1	2	3	
	1	1	2	4	
	1	1	3	1	
	1	1	3	2	
	1	1	3	3	
	1	1	3	4	
	1	1	4	1	
ſ.	1	1	4	2	
	1	1	4	3	
	1	1	4	4	'B
	1	2	1	1	
	"	"	"	"	
	1	2	4	4	
	1	3	1	1	
w.	"	"	"	"	
	1	3	4	4	
	1	4	1	1	
	"	"	"	"	
	1	4	4	4	'C
	2	1	1	1	

u. ſ. w.

$\binom{0,\ 1}{a,\ b}$

$\begin{pmatrix}0, & 1\\ a, & b\end{pmatrix}$

3)

	00000	0
	00001	1
	00010	2
	00011	3
	00100	4
u.	00101	5
	00110	6
	00111	7
	01000	8
	01001	9
	01010	10
ſ.	01011	11
	01100	12
	01101	13
	01110	14
	01111	15
	10000	16
	10001	17
w.	10010	18
	10011	19
	10100	20
	10101	21
	10110	22
	10111	23
	11000	24
	11001	25

u. ſ. w.

$\begin{pmatrix}0, & 1, & 2\\ a, & b, & c\end{pmatrix}$

4)

	0000	0
	0001	1
	0002	2
	0010	3
	0011	4
u.	0012	5
	0020	6
	0021	7
	0022	8
	0100	9
	0101	10
ſ.	0102	11
	0110	12
	0111	13
	0112	14
	0120	15
	0121	16
	0122	17
w.	0200	18
	0201	19
	0202	20
	0210	21
	0211	22
	0212	23
	0220	24
	0221	25
	0222	26
	1000	27
	1001	28

u. ſ. w.

$\begin{pmatrix}0, & 1, & 2, & 3\\ a, & b, & c, & d\end{pmatrix}$

5)

	0000	0
	0001	1
	0002	2
	0003	3
	0010	4
u,	0011	5
	0012	6
	0013	7
	0020	8
	0021	9
	0022	10
	0023	11
ſ.	0030	12
	0031	13
	0032	14
	0033	15
	0100	16
	″ ″ ″ ″	″
	0133	31
w.	0200	32
	″ ″ ″ ″	″
	0233	47
	0300	48
	″ ″ ″ ″	″
	0333	63
	1000	64

u. ſ. w.

1. *Anmerkung.*

Beide Auflösungen geben die Variationen so, dass diese als Zahlen betrachtet wachsend fortlaufen und als Wörter eines Lexicons, lexicographisch fortgehn.

2. *Anmerkung.*

Wenn man das Gesetz kennen lernen will, nach welchen die Zahlen eines Zahlensystems fortlaufen, so hat man nur nöthig die Variationen der Grundzeichen desselben mit Wiederholungen aufzusuchen und zwar in der Ordnung, dass man hierbei successiv von der kleinsten Zahl zu den grössern übergeht. Dies ist der Fall wenn man die Variationen der Grundzeichen nach einer der beiden gegebenen Auflösungen (1. *Anmerk.*) aufsucht, daher stellt das dritte Beispiel das Gesetz für das dyadische Zahlensystem, das vierte Beispiel das Gesetz für das triadische und das fünfte Beispiel das Gesetz für das tetradische Zahlensystem vor Augen. *a*).

Die Zahlen welche bei diesen drei Beispielen rechter Hand neben dem Doppelstriche stehn, sind die Zahlen des decadischen Systems, mit welchen die daneben liegenden Zahlen des dargestellten Systems correspondiren.

3. *Anmerkung.*

Die nämliche Anmerkung welche pag. 60 und 61 in Rücksicht auf die beiden rein combinatorischen Auflösungen der Aufgabe, alle Combinationen mit Wiederholungen zu finden, gegeben ist, gilt auch für die beiden rein combinatorischen Auflösungen, die für die Bestimmung der Variationen gegeben sind, wenn man in der genannten

a) Das dritte Beispiel nämlich, giebt die Variationen der Grundzeichen 0, 1; das vierte Beispiel die Variationen der Grundzeichen 0, 1, 2; das fünfte Beispiel die Variationen der Grundzeichen 0, 1, 2, 3.

ten Anmerkung die Behauptung übergeht daſs die erſte Auflöſung eine vollſtändige Involution in Rückſicht auf die Anzahl der Elemente giebt.

4. *Anmerkung.*

Die Involution, welche die zweite rein combinatoriſche Auflöſung giebt, läſst nicht ſolche Umwandelungen ihrer Form zu, wie im zweiten Zuſatze des §. 24 mit der Involution der Combinationen vorgenommen ſind. Für die Variationen giebt es daher auch nicht ſolche Gleichungen als im zweiten, dritten und vierten Zuſatze des §. 24 für die Combinationen aufgeſtellt ſind.

1. *Zuſatz.*

Aus der Darſtellung der zweiten rein combinatoriſche Auflöſung folgt dieſe Gleichung:

$$'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E + 'F + .. + '\mathcal{N}.$$

2. *Zuſatz.*

Da man nach der erſten rein combinatoriſchen Auflöſung die nächſtfolgende Variationsklaſſe erhält, wenn man allen Complexionen der nächſtvorhergehenden Klaſſe ſucceſſiv das erſte, zweite, dritte Element des Zeigers u. ſ. f. vorſetzt, ſo iſt die Gleichung für die Variationen, welche mit der des fünften Zuſatzes in §. 24 correſpondirt, dieſe:

$$\underset{\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}}{\overset{0}{\mathcal{N}}} = a\,'\overset{-1}{\mathcal{N}} + b\,'\underset{\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}}{\overset{-1}{\mathcal{N}}} + \;'\overset{-1}{\mathcal{N}} + d\,'\overset{-1}{\mathcal{N}} + \ldots$$

3. *Zuſatz.*

Es hat eine jede Variationsklaſſe ſo viele Complexionen der einzelnen Ordnungen a, b, c, d u. ſ. f. als

 die

die nächstvorhergehende Klasse Complexionen überhaupt hat.

Hiernach läßt sich für die Variationen eine solche Figur zeichnen, wie für die Combinationen im 7ten Zusatze des §. 24 gegeben ist. Sie ist für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{a,\ b,\ c,\ d,\ e}$ diese:

	a	b	c	d	e
'A	1	1	1	1	1
'B	5	5	5	5	5
'C	5^2	5^2	5^2	5^2	5^2
'D	5^3	5^3	5^3	5^3	5^3
'E	5^4	5^4	5^4	5^4	5^4
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Sowohl das Gesetz nach welchen die horizontalen als auch das nach welchen die neben einander liegenden vertikalen Zahlenreihen fortlaufen liegt hier deutlich vor Augen, es macht also keine Schwierigkeit die Figur entweder durch ein Schreiben der vertikalen oder durch ein Schreiben der horizontalen Zahlenreihen so weit fortzusetzen als man will.

Für $m+1$ Klassen erhält die Figur bei r verschiedenen Elementen $a,\ b,\ c,\ \ldots\ v,\ w,\ x,\ y,\ z$ diese Form:

	a	b	c	d	e w
'A	1	1	1	1	1 1
'B	r	r	r	r	r r
'C	r^2	r^2	r^2	r^2	r^2 . . . r^2
'D	r^3	r^3	r^3	r^3	r^3 . . . r^3
'E	r^6	r^4	r^4	r^4	r^4 . . . r^4
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″ ″ ″
$\overset{0}{M}$	r^{m-1}	r^{m-1}	r^{m-1}	r^{m-1}	r^{m-1} . . r^{m-1}
$\overset{+1}{M}$	r^m	r^m	r^m	r^m	r^m . . . r^m

§. 44.

Lehrsatz.

Die Anzahl der Complexionen der mten Variationsklasse mit Wiederholungen ist für r verschiedene Elemente, gleich r^m.

Beweis.

Die m + 1te Klasse hat so viele Complexionen der Ordnung jedes einzelnen Elements des Zeigers als die mte Klasse Complexionen überhaupt hat, oder, welches einerlei ist, der mten Klasse kommen so viele Complexionen zu, als die m + 1te Klasse Complexionen von der Ordnung jedes der gegebenen Elemente besitzt. Da nun nach der letzten Figur des §. 44, die m + 1te Klasse von der Ordnung jedes der Elemente des Zeigers, r^m Complexionen hat, so muss auch die mte Klasse r^m Complexionen haben,

α) Von den Variationen überhaupt ohne Wiederholungen.

§. 45.

Aufgabe.

Es werden die Variationen ohne Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3.\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ gesucht.

1.

β) Rein combinatorische Auflösung.

Man beobachte im Ganzen die Vorschriften der ersten rein combinatorischen Auflösung der Aufgabe des §. 44. setze aber nicht einer jeden Complexion der vorhergehenden Klasse, des Zeigers Element p vor, um die Complexionen der Ordnung p der nächstfolgenden Klasse zu erhalten, sondern schreibe dieses Element nur vor die Complexionen in welchen es sich nicht befindet.

Beweis.

Es ist einleuchtend, dass die Auflösung nur die Variationen nicht giebt, in welchen *ein* und dasselbe Element öfter als *ein*mal vorkömmt. Die Aufgabe verlangt aber auch nur die Variationen, welche *ein* und dasselbe Element nur *ein*mal enthalten, folglich ist die Auflösung auch richtig.

Bei-

Beispiele.

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4}{a,\ b,\ c,\ d}$$

A`	a	b	c	d
B`	ab	ac	ad	
	ba	bc	bd	
	ca	cb	cd	
	da	db	dc	
C`	abc	abd	acb	
	acd	adb	adc	
	bac	bad	bca	
	bcd	bda	bdc	
	cab	cad	cba	
	cbd	cda	cdb	
	dab	dac	dba	
	dbc	dca	dcb	
D`	abcd	abdc	acbd	
	acdb	adbc	adcb	
	bacd	badc	bcad	
	bcda	bdac	bdca	
	cabd	cadb	cbad	
	cbda	cdab	cdba	
	dabc	dacb	dbac	
	dbca	dcab	dcba	

A`	1	2	3	4
B`	12	13	14	
	21	23	24	
	31	32	34	
	41	42	43	
C`	123	124	132	
	134	142	143	
	213	214	231	
	234	241	243	
	312	314	321	
	324	341	342	
	412	413	421	
	423	431	432	
D`	1234	1243	1324	
	1342	1423	1432	
	2134	2143	2314	
	2341	2413	2431	
	3124	3142	3214	
	3241	3412	3421	
	4123	4132	4213	
	4231	4312	4321	

Anmerkung.

Die Auflösung giebt für die Variationen überhaupt ohne Wiederholungen, eine eben solche Darstellung, als die erste rein combinatorische Auflösung der Aufgabe des §. 43 für die Variationen überhaupt mit Wiederholungen, giebt.

Zusatz.

Aus der Art und Weise, wie die Auflösung aus einer Klasse die nächstfolgende herleitet, entsteht diese Gleichung:

$$\overset{0}{N}'_{\left(\begin{smallmatrix}1,\ 2,\ 3,4\,..\\ a,\ b,\ c,d\,..\end{smallmatrix}\right)} = a\,\overset{-1}{N}'_{\left(\begin{smallmatrix}2,3,4\,..\\ b,c,d\,..\end{smallmatrix}\right)} + b\,\overset{-1}{N}'_{\left(\begin{smallmatrix}1,3,4\,..\\ a,c,d\,..\end{smallmatrix}\right)} + c\,\overset{-1}{N}'_{\left(\begin{smallmatrix}1,2,4\,..\\ a,b,d\,..\end{smallmatrix}\right)} + \ldots.$$

* * *

Die rein combinatoriſche Anflöſung, nach welcher die Unionen unter einander geſchrieben werden, wird hier übergangen, weil die Einfachheit wodurch ſich dieſe Auflöſung ſonſt empfiehlt, hier wegfällt.

Darſtellung einzelner Klaſſen der Variationen überhaupt ohne Wiederholungen *a*).

§. 46.

Aufgabe.

Für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&3,&4\ldots\\ a,&b,&c,&d\ldots\end{smallmatrix}\right)$ die *m*te Klaſſe der Variationen überhaupt ohne Wiederholungen darzuſtellen.

I.

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe die erſten *m* Elemente des Zeigers gutgeordnet neben einander. Dies giebt die erſte Complexion.

2) Man verwandele das *m*te Element, alſo das letzte der erſten Complexion, in das nächſtfolgende des Zeigers, ſo

a) Hierher gehört, mit gehörigen Veränderungen, die nämliche Anmerkung, welche in §. 27 für die Combinationen gegeben iſt.

so erhält man die zweite Complexion. Hieraus leite man auf die nämliche Weise die dritte, aus der dritten Complexion die vierte ab u. s. f. bis man auf diese Weise weiter keine Complexion finden kann.

3) In allen gefundenen Complexionen schreibe man für das m—1te also für das vorletzte Element das nächstfolgende des Zeigers und lasse die übrigen Elemente der Complexion unverändert ausser wenn man hierbei auf eine Complexion kömmt, deren *m*tes Element das genannte des Zeigers ist, denn in diesem Falle setzt man für dieses *m*te dasjenige, welches ihm im Zeiger zunächst vorhergeht. Ist dies geschehn so leitet man aus den jetzt gefundenen Complexionen auf die nämliche Weise wieder andere ab und setzt dies überhaupt so lange fort als möglich ist.

4) In einer jedem der durch 3) erhaltenen Complexionen substituire man für das m—2te Element dasjenige des Zeigers, welches ihm hierinn zunächst folgt und verändere ausser diesem m—2ten kein anderes Element der Complexionen, ausgenommen, wenn eines von denen, die auf das genannte m—2te folgen, mit dem Substituirten einerlei ist, weil in diesem Falle dafür dieses m—2te gesetzt werden muss. Mit den hierdurch entstandenen Complexionen nehme man dann wieder die nämliche Operation vor, wie auch mit denen die man hierdurch wieder bekommen hat und fahre hiermit überhaupt so lange fort als es nur immer geschehn kann.

5) Nach der nämlichen Vorschrift welche 4) giebt, folgere man aus den Complexionen die 4) gegeben hat wieder neue her, nur mit dem Unterschiede, dass bei dieser Ableitung, für das m—3te Element die Substitution geschehen muss.

6. Hieraus erhellet ſchon wie weiter zu verfahren iſt, und daſs die letzte Complexion eine umgekehrt gutgeordnete der letzten *m* Elemente des Zeigers ſeyn wird.

Beweis.

Daſs in keiner der gefundenen Mtionen ein Element öfter als *einmal* vorkommen kann, fällt hinreichend in die Augen; es fragt ſich aber ob nicht bei der Beobachtung der Regeln der Auflöſung eine oder mehrere Complexionen übergangen werden? Dieſs iſt aus dem Grunde nicht möglich weil der Mangel irgend einer Mtion das Fehlen der zuerſt hingeſchriebenen bedingt. Denn geſetzt es wäre von der vierten Klaſſe für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g}$ die Rede und man wollte behaupten daſs die Auflöſung nicht die Complexion *badge* gäbe, ſo müſste man annehmen, daſs man durch ſie auch nicht die Complexionen *abdge*, *abcge*, *abcfe*, *abcef*, *abcdf* und *abcde* erhielte, weil *abcdf* nach 2) aus *abcde* entſteht, weil ferner nach 3) *abcef* aus *abcdf*, *abcfe* aus *abcef*, *abcge* aus *abcfe* entſpringt, weil nach 4) *abdge* aus *abcge* und endlich weil *badge* nach 6) aus *abdge* abgeleitet wird.

Beispiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{a,\ b,\ c,\ d,\ e}$

D`

abcd	bacd	cabd	dabc	eabc
abce	bace	cade	dace	eacd
abdc	badc	cadb	dacb	eacb
abde	bade	cade	dace	eacd
abec	baec	caeb	daeb	eadb
abed	baed	caed	daec	eadc
acbd	bcad	cbad	dbac	ebac
acbe	bcae	cbae	dbae	ebad
acdb	bcda	cbda	dbca	ebca
acde	bcde	cbde	dbce	ebcd
aceb	bcea	cbea	dbea	ebda
aced	bced	cbed	dbec	ebdc
adbc	bdac	cdab	dcab	ecab
adbe	bdae	cdae	dcae	ecad
adcb	bdca	cdba	dcba	ecba
adce	bdce	cdbe	dcbe	ecbd
adeb	bdea	cdea	dcea	ecda
adec	bdec	cdeb	dceb	ecdb
aebc	beac	ceab	deab	edab
aebd	bead	cead	deac	edac
aecb	beca	ceba	deba	edba
aecd	becd	cebd	debc	edbc
aedb	beda	ceda	deca	edca
aedc	bedc	cedb	decb	edcb

2)

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe das *m*te und die folgenden Elemente des Zeigers unter einander.

2) Vor diese setze man das m—1te Element des Zeigers; hierauf substituire man für das erste Element der jetzt gefundenen Binionen das nächstfolgende und für ihr zweites, wenn es mit dem substituirten identisch ist, das

das nächstvorhergehende des Zeigers. Dies giebt Binionen der Ordnung des mten Elements des Zeigers. Aus diesen mache man auf die nämliche Weise Binionen der Ordnung des m+1ten Elements, hieraus wieder die Binionen der Ordnung des m+2ten Elements und fahre so fort bis man die Binionen der Ordnung des letzten Elements des Zeigers hat.

3) Sämmtlichen Binionen schreibe man das m--2te Element des Zeigers vor, so erhält man Ternionen der Ordnung dieses m—2ten Elements. Hieraus leite man die Ternionen der Ordnung des m—1ten Elements, aus diesen wieder die Ternionen der Ordnung des mten Elements des Zeigers her u. s. w. und zwar nach folgender allgemeinen Vorschrift:

Um aus den Complexionen einer gewissen Ordnung, die Complexionen der nächsthöhern Ordnung zu erhalten substitire man für ihr erstes Element das zunächstfolgende des Zeigers und wenn eines ihrer übrigen Elemente das eben genannte substituirte des Zeigers seyn sollte, so setze man für jenes eine Element der Complexion dasjenige, welches ihm im Zeiger zunächst vorhergeht.

4) Vor alle durch 3) gefundene Ternionen schreibe man das m—3te Element des Zeigers und leite aus den hierdurch entstandenen Quaternionen der Ordnung des genannten m—3ten Elements, wieder nach der allgemeinen Vorschrift von 3), die Quaternionen der höhern Ordnungen her.

u. s. w.

Beweis.

Es bedarf keines Beweises, daſs in den Binionen, Ternionen u. s. w. Mtionen, welche die Auflösung giebt keine Wiederholungen vorkommen, weil dieses deutlich genug in die in Augen fällt; es braucht daher nur bewiesen

ſen zu werden, daſs man durch die Auflöſung auch alle Variations-ntionen ohne Wiederholungen bekömmt. Am kürzeſten läſst ſich dieſes darthun, wenn man dabei einen ſpeciellen Fall zum Grunde legt. Es ſoll daher unterſucht werden ob die Auflöſung für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{a,\ b,\ c,\ d,\ e}$ alle Variationsquaternionen ohne Wiederholungen darſtellt.

α) Die zweite Vorſchrift giebt Binionen der Elemente c, d, e und zwar alle hier mögliche, weil ſie überhaupt bei *m* Elementen, für jede Ordnung, m—1 Binionen ohne Wiederholungen darſtellt und mehr als m—1 von jeder Ordnung nicht gedacht werden können.

β) Durch die dritte Vorſchrift der Auflöſung entſtehn für die Elemente b, c, d, e ſo viele Ternionen der Ordnung b der Ordnung c u. ſ. w. als es für die Elemente c, d, e Binionen ohne Wiederholungen giebt. Die dritte Vorſchrift giebt daher alle Variationsternionen ohne Wiederholungen für die Elemente b, c, d, e, weil es nur ſo viele dieſer Ternionen von der Ordnung b geben kann als Variationsbinionen ohne Wiederholungen für die Elemente c, d, e denkbar ſind und ſich eben ſo viele und auch nicht mehrere Ternionen der Ordnung c, der Ordnung d u. ſ. w. denken laſſen, als Ternionen der Ordnung b ſtatt finden.

γ) Durch die vierte Vorſchrift der Auflöſung werden für die Elemente a, b, c, d, e ſo viele Quaternionen von der Ordnung a, der Ordnung b u. ſ. f. gefunden als für die Elemente b, c, d, e Ternionen ohne Wiederholungen möglich ſind. Aus dieſem Grunde bekömmt man auch durch die vierte Vorſchrift alle geſuchte Quaternionen, denn hiervon kann es nur ſo viele von der Ordnung a, der Ordnung b u. ſ. f. geben als es für die Elemente b, c, d, e Ternionen ohne Wiederholungen giebt.

Bei-

Beispiele.

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{a,\ b,\ c,\ d,\ e}$$

C	C
a b c	1 2 3
a b d	1 2 4
a b e	1 2 5
a c b	1 3 2
a c d	1 3 4
a c e	1 3 5
a d b	1 4 2
a d c	1 4 3
a d e	1 4 5
a e b	1 5 2
a e c	1 5 3
a e d	1 5 4
b a c	2 1 3
b a d	2 1 4
b a e	2 1 5
b c a	2 3 1
b c d	2 3 4
b c e	2 3 5
u. ſ. w.	u. ſ. w.

Anmerkung.

Das nämliche welches in Rückſicht auf die beiden Auflöſungen der Aufgabe des §. 28 in der Anmerkung im allgemeinen geſagt iſt, gehört auch hierher.

§. 47.

Lehrſatz

Die Anzahl der Complexionen der mten Klaſſe der Variationen ohne Wiederholungen iſt für r verſchiedene Elemente gleich

$$r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \,.\, r-3 \,.\,.\,.\,.\, (r-(m-1)).$$

Beweis.

Die mte Variationsklaſſe enthält alle Combinationsmtionen nebſt allen möglichen Formen derſelben, folglich

lich mufs sie auch so viele Complexionen besitzen als die Summe aller Versetzungszahlen der einzelnen Complexionen der mten Combinationsklasse ausmacht. Für eine jede Mtion in welcher keine Wiederholungen vorkommen ist aber die Versetzungszahl gleich 1 . 2 . 3 . 4 . . . m (§. 16) und bei r verschiedenen Elementen besitzt die mte Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen $\frac{r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \,.\, r-3 \,.\,.\,.\, (r-(m-1))}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \text{ -------- } m}$ Mtionen, folglich ist auch bei r verschiedenen Elementen die gedachte Summe aller Variations-mtionen ohne Wiederholungen gleich $\frac{r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \,.\, r-3 \,.\,.\,.\, (r-(m-1))}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \text{ ----- } m} \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\, m =$ $r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \,.\, r-3 \,.\,.\,.\, (r-(m-1))$.

γ. Von den Variationen zu bestimmten Summen mit Wiederholungen.

§. 48.

Aufgabe.

Es werden für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ .\ .\ .\ \nu}{a,\ b,\ c,\ d\ .\ .\ .\ n}$ alle Variationen mit Wiederholungen zur Summe ν gesucht.

1.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe das Element ν hin, so hat man $\overset{\nu}{A}$.

2) Hieraus leite man $\overset{\nu}{B}$ her, aus dieser Klasse folgere man wieder $\overset{\nu}{C}$ u. s. w. wie nach §. 9 aus der einzifrigen Zahl ν successiv die zweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen u. s. w. die ν zifrigen Zahlen zur Summe ν abgeleitet werden.

Die

Die Subſtitution der Buchſtaben für die mit ihnen correſpondirenden Elemente der gefundenen Zahlencomplexionen giebt die geſuchten Buchſtabencomplexionen.

Beweis.

Durch die Vorſchrift der Auflöſung in §. 9 erhält man alle mögliche Zahlen deren Ziffernſumme gleich ν iſt. Eine jede dieſer Zahlen kann aber als eine Variation angeſehn werden und es läſst ſich keine Variation zur Summe ν denken, die ſich nicht unter dieſen Zahlen befände, alſo macht die einzifrige Zahl die Klaſſe ${}^{\nu}\mathfrak{A}$, die zweizifrigen machen die Klaſſe ${}^{\nu}\mathfrak{B}$, die dreizifrigen die Klaſſe ${}^{\nu}\mathfrak{C}$ aus u. ſ. w. und folglich muſs auch, da mit einer jeden Buchſtabenvariation eine Zahlenvariation correſpondirt, die gedachte Subſtitution alle Buchſtabenvariationen geben.

Beispiele.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ a, & b, & c, & d, & e, & f \end{pmatrix}$$

6	^6A	f	^6A
15 24 33 42 51	^6B	ae bd cc db ea	^6B
114 123 132 141 213 222 231 312 321 411	^6C	aad abc acb ada bac bbb bca cab cba daa	^6C
1113 1122 1131 1212 1221 1311 2112 2121 2211 3111	^6D	aaac aabb aaca abab abba acaa baab baba bbaa caaa	^6D
11112 11121 11211 12111 21111	^6E	aaaab aaaba aabaa abaaa baaaa	^6E
111111	^6F	aaaaaa	^6F

2)

α) *Rein combinatorische Auflösung.*

1) Man setze das Element ν als erste Klasse hin.

2) Man

2) Man schreibe rechts neben das erste Element des Zeigers das vorletzte desselben; dies giebt die erste Complexion der zweiten Klasse. Aus dieser Complexion leite man die zweite Binion her indem man für ihr erstes Element das nächstfolgende und für ihr letztes das nächstvorhergehende des Zeigers substituirt und lasse nach diesem Ableitungsgesetze wieder aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Binion entstehn u. s. w. Die Binion ist die letzte deren letztes Element das erste des Zeigers ist.

3) Aus der zweiten Klasse leite man die dritte, aus der dritten die vierte Klasse u. s. f. nach folgenden allgemeinen Vorschriften ab:

α) Man setze vor alle Complexionen, welche sich nicht mit dem ersten Elemente des Zeigers endigen, dieses erste Element *a* vor und substituire für ihr Endelement das nächstvorhergehende des Zeigers, so hat man die Complexionen der Ordnung *a*.

β) Man verwandele das erste Element derjenigen dieser Complexionen, welche nicht a zum Endelemente haben, in das nächstfolgende und schreibe für ihr letztes Element das nächstvorhergehende des Zeigers. Dies giebt Complexionen der Ordnung *b*.

γ) Auf die nämliche Weise, wie in β) vorgeschrieben ist, leite man aus diesen Complexionen der Ordnung *b* die der Ordnung *c* und so überhaupt aus den Complexionen der Ordnung des m—1ten Elements die Complexionen der Ordnung des mten Elements ab.

Beweis.

Dass die Complexionen zu welchen man durch die Auflösung kömmt die Summe ν haben ist einleuchtend, dass

daſs man aber, wenn man die Vorſchriften der Auflöſung beobachtet, auch keine Complexionen übergeht, läſst ſich ſo zeigen;

1) Es iſt nur *eine* Union möglich, folglich erhält man alle Unionen, weil nach der erſten Vorſchrift der Auflöſung zuerſt ν hingeſchrieben wird.

2) Es wird keine Binion übergangen, denn es läſst ſich hier nur *eine* denken, die ſich mit a anfängt und von dieſer geht man aus und eine jede andere, welche nicht a zum Anfangselement hat, läſst ſich dadurch, daſs man ſucceſſiv ihr erſtes Element in das nächſtvorhergehende und ihr letztes in das nächſtfolgende des Zeigers verwandelt auf die gedachte Binion der Ordnung a reduciren, ſo daſs alſo eine jede Binion zur Summe ν, welche die Ordnung a nicht hat, durch die zweite Regel der Auflöſung aus der Binion der Ordnung a erhalten wird.

3) Es kann aber auch keine Ternion, Quaternion u. ſ. w, übergangen werden. Denn geſetzt man denkt ſich unter einer Mtion eine Complexion einer höhern Klaſſe als die zweite iſt und nimmt an daſs eine Mtion fehlt die ſich nicht mit a anfängt, ſo muſs man wegen der zweiten und dritten Vorſchrift der dritten Regel der Auflöſung auch nothwendig annehmen, daſs auch die Mtion fehlt, welche aus ihr gemacht wird wenn man für ihr erſtes Element das nächſtvorhergehende und für ihr letztes das nächſtfolgende des Zeigers ſchreibt. Hieraus folgt offenbar, daſs der Mangel einer Mtion, die p zum Anfangselemente hat, den Mangel einer jeden Mtion bedingt, die ſich mit einem Elemente anfängt das im Zeiger früher als p vorkömmt und daſs er folglich auch das Fehlen einer Mtion vorausſetzt deren erſtes Element das Element a iſt. Iſt aber eine Mtion der Ordnung a nicht vorhanden, ſo muſs auch die M—1tion übergangen ſeyn, die aus dieſer Mtion der Ordnung a entſteht, wenn man ihr erſtes Element a wegläſst und für ihr Endelement das

 nächſt-

nächstfolgende des Zeigers substituirt. (*Aufl. 3, α,*). Es erfordert also der Mangel einer jeden Mtion jedesmal den Mangel einer M—1tion oder welches einerlei ist, das Fehlen einer Complexion irgend einer höhern Klasse als der zweiten, bedingt nothwendig, dass durch die Auflösung auch eine Complexion der nächstvorhergehenden Klasse und daher auch eine der zweiten Klasse übergangen wird.

Hierhergehörige Beispiele sind die zur ersten Auflösung gegebenen.

1. *Anmerkung.*

Die erste Anmerkung zur zweiten Auflösung der Aufgabe des §. 29 ist auch auf die jetzt gegebene Auflösung anzuwenden, wie man aus der hierunter stehenden Figur deutlich sieht.

	5	
1	4	${}^4A$
	2 3	
	3 2	
	4 1	
1	1 3	${}^4B$
1	2 2	
1	3 1	
	2 1 2	
	2 2 1	
	3 1 1	
1	1 1 2	${}^4C$
1	1 2 1	
1	2 1 1	
	2 1 1 1	
1	1 1 1 1	${}^4D$

2. *Anmerkung.*

Das nämliche was in der zweiten Anmerkung pag. 91 gesagt ist, muss auch hier erinnert werden.

3)

β. *Rein combinatorische Auflösung.*

Man schreibe das erste Element des Zeigers hin und leite hieraus die Complexionen zur Summe 2, aus diesen wieder die Complexionen zur Summe 3 und so ferner aus den Complexionen zur Summe $\nu - 1$ die zur Summe ν her und zwar auf folgende Weise:

1) Allen Complexionen zur nächstvorhergehenden Summe setze man das erste Element des Zeigers vor.

2) Man substituire für das erste Element jeder Complexion zur nächstvorhergehenden Summe, das dem Zeiger nach nächstfolgende Element und schreibe die Complexionen die man hierdurch erhält, in der Ordnung wie sie gefunden sind, unter die welche man durch die erste Vorschrift bekommen hat.

Beweis.

Ist das Anfangselement einer Complexion zur Summe m das erste Element des Zeigers, so wird sie wenn man ihr das erste Element nimmt, eine Complexion zur Summe $m - 1$ aus der sie vermittelst der ersten Vorschrift der Auflösung entsteht. Fängt sich eine Complexion zur Summe m nicht mit dem ersten Elemente des Zeigers an, so macht man sie, wenn man für ihr erstes Element das nächstvorhergehende des Zeigers substituirt, zu einer Complexion zur Summe $m - 1$ aus der man sie nach der zweiten Vorschrift der Auflösung erhält.

Hieraus erhellet, dass die erste und zweite Vorschrift der Auflösung alle Complexionen zur Summe m geben,

wenn man alle Complexionen zur Summe m—1 hat. Es giebt aber die Auflösung die Complexionen zur Summe 1 und zur Summe 2 gewiſs, folglich auch alle Complexionen zur Summe 3, zur Summe 4 u. ſ. f. zur Summe ν.

Beiſpiele.

$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ a, & b, & c, & d, & e, & i \end{pmatrix}$

	$^6\mathfrak{S}$		$^6\mathfrak{S}$
$^6\mathfrak{A}$	a a a a a a	$^6\mathfrak{A}$	1 1 1 1 1 1
	a a a a b		1 1 1 1 2
	a a a b a		1 1 1 2 1
	a a a c		1 1 1 3
	a a b a a		1 1 2 1 1
	a a b b		1 1 2 2
	a a c a		1 1 3 1
	a a d		1 1 4
	a b a a a		1 2 1 1 1
	a b a b		1 2 1 2
	a b b a		1 2 2 1
	a b c		1 2 3
	a c a a		1 3 1 1
	a c b		1 3 2
	a d a		1 4 1
	a e		1 5
$^6\mathfrak{B}$	b a a a a	$^6\mathfrak{B}$	2 1 1 1 1
	b a a b		2 1 1 2
	b a b a		2 1 2 1
	b a c		2 1 3
	b b a a		2 2 1 1
	b b b		2 2 2
	b c a		2 3 1
	b d		2 4
$^6\mathfrak{C}$	c a a a	$^6\mathfrak{C}$	3 1 1 1
	c a b		3 1 2
	c b a		3 2 1
	c c		3 3
$^6\mathfrak{D}$	d a a	$^6\mathfrak{D}$	4 1 1 1
	d b		4 2
$^6\mathfrak{E}$	e a	$^6\mathfrak{E}$	5 1
$^6\mathfrak{F}$	f	$^6\mathfrak{F}$	6

1. *An-*

1. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöſung giebt lexicographiſche Involutionen (§. 29, β. *Rein combinatoriſche Aufl. 1. Anmerk.*). Das Zeichen für dieſe Involutionen iſt $\mathfrak{J}$ und zur Bezeichnung des Inbegriffs ihrer Complexionen der Ordnung *a*, der Ordnung *b*, der Ordnung *c* u. ſ. w. bedient man ſich der Buchſtaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ u. ſ. f.

2. *Anmerkung.*

Das nämliche was in der zweiten Anmerkung pag. 94 von der Klaſſen - und lexicographiſchen Involution geſagt iſt, die ſich auf die Combinationen zu beſtimmten Summen beziehn, gilt auch für dieſe beiden Involutionen, wenn ſie Variationen zu beſtimmten Summen darſtellen.

1. *Zuſatz.*

Es iſt
$$\underset{\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ ..}{a,\ b,\ c,\ d\ ..}}{{}^{v}J} = \underset{\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ ..}{a,\ b,\ c,\ d\ ..}}{{}^{v}\mathfrak{J}}$$

2. *Zuſatz.*

Es iſt
$$\underset{\binom{1,\ 2,\ 3,\ ..\ 6}{a,\ b,\ c,\ ..\ g}}{{}^{6}\mathfrak{J}} = {}^{6}\mathfrak{A} + {}^{6}\mathfrak{B} + {}^{6}\mathfrak{C} + {}^{6}\mathfrak{D} + {}^{6}\mathfrak{E} + {}^{6}\mathfrak{F} + {}^{6}\mathfrak{G}.$$

Hieraus erhellet ſchon welche Gleichung für die Summe *n* überhaupt ſtatt findet.

* * *

Solche Zuſätze als der 3te bis 7te Zuſatz des §. 29 für die lexicographiſchen Combinationsinvolutionen ſind,

 fallen

fallen für die lexicographischen Variationsinvolutionen weg.

Darstellung einzelner Klassen der Variationen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen.

§. 49.

Aufgabe.

Es soll die *m*te Klasse zur Summe *n* für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots}{a, b, c, d, e, f \ldots}$ dargestellt werden.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

2) Man setze neben m—1 Einsen rechter Hand das Supplement zur Summe *n*, so hat man die erste Complexion der gesuchten Klasse.

2) Aus dieser leite man die zweite, aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Complexion her u. s. w. wie man nach der Vorschrift des 12ten und 13ten Satzes des §. 6 aus einer Zahl die nächstgröſsere ableitet.

Substituirt man in den gefundenen Zahlencomplexionen für die Zahlenelemente die mit ihnen, dem Zeiger nach, correspondirenden Buchstaben, so bekömmt man die Buchstabencomplexionen der verlangten Klasse.

Beweis.

Die Auflösung schreibt vor, daſs man zuerst die Complexion hinsetzen soll, welche als Zahl betrachtet die geringste *m*zifrige Zahl zur Summe *n* ist und daſs man aus dieser so viele andere Complexionen herleiten soll, als nach den Vorschriften des 12ten und 13ten Satzes des §. 6, daraus abgeleitet werden können. Diese Vorschriften führen aber jedesmal von einer *m*zifrigen Zahl der Summe *n* zur nächstgröſsern *m*zifrigen Zahl der nämli-

chen

chen Summe, alſo übergeht man gewiſs keine der geſuchten Zahlencomplexionen, wenn eine jede als eine *m*zifrige Zahl zur Summe *n* angeſehen werden kann. Dies iſt aber der Fall, folglich giebt die Auflöſung alle geſuchte Zahlencomplexionen und daher muſs auch die Subſtitution der Buchſtaben, alle Buchſtabencomplexionen geben.

Beiſpiel.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e, & f \ldots \end{pmatrix}$$

$${}^{10}D$$

1117	1441	2341	8511
1126	1513	2413	4114
1135	1522	2422	4123
1144	1531	2431	4132
1153	1612	2512	4141
1162	1621	2521	4213
1171	1711	2611	4222
1216	2116	3115	4231
1225	2125	5124	4312
1234	2134	3133	4321
1243	2143	3142	4411
1252	2152	3151	5113
1261	2161	3214	5122
1315	2215	3223	5131
1324	2224	3232	5212
1333	2233	3241	5221
1342	2242	3313	5311
1351	2251	3322	6112
1414	2314	3331	6121
1423	2323	3412	6211
1432	2332	3421	7111

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) In dem Zeiger durchlaufe man von dem *n*ten Elemente an, von der Rechten nach der Linken, *m* Elemente

mente und ſchreibe des mte Element, auf welches man hierbei kömmt, als Union hin.

2) Hieraus leite man die Binionen, aus den Binionen die Ternionen, aus dieſen wieder, die Quaternionen u. ſ. f. aus den M—1tionen die Mtionen ab und zwar nach folgenden allgemeinen Vorſchriften.

α) Man ſetze allen ſchon gefundenen Complexionen der nächſtvorhergehenden Klaſſe zuerſt a vor, dies giebt für die nächſtfolgende Klaſſe die Complexionen der Ordnung a.

β) Man verwandele das erſte Element der Complexionen, die α) gegeben hat, in das nächſtfolgende des Zeigers und ſetze für ihr letztes Element das nächſtvorhergehende des Zeigers, übergehe aber bei dieſer Operation diejenigen Complexionen, welche ſich mit a endigen. Aus den hierdurch gefundenen Complexionen der Ordnung b, leite man wieder auf die nämliche Weiſe die der Ordnung c her u. ſ. w. und ſetze dieſes Verfahren überhaupt ſo lange als möglich fort.

Beweis.

1) Eine jede gegebene Ntion zur Summe p, die nicht die Ordnung a hat, wird dadurch, daſs man ſucceſſiv für ihr erſtes Element das nächſtvorhergehende und für ihr letztes das nächſtfolgende des Zeigers ſubſtituirt auf eine Ntion der nämlichen Summe reducirt, welche die Ordnung a hat. Für jede Ntion zur Summe p, wenn ſie nich die Ordnung a beſitzt giebt es alſo eine Ntion der Ordnung a zur Summe p, aus welcher ſie abgeleitet wird, wenn man ſucceſſiv für das erſte Element derſelben das nächſtfolgende und für das letzte das nächſtvorhergehende des Zeigers ſchreibt. (*Aufl.* β.).

2) Wird

2) Wird einer Ntion der Ordnung a zur Summe p das erste Element genommen, so wird aus ihr eine N—1tion zur Summe $p—1$, aus welcher sie durch ein blosses Vorschreiben des a gemacht werden kann. (*Anfl.* α.)

Aus diesen beiden Sätzen folgt offenbar, dass die Auflösung alle Ntionen zu einer gewissen Summe giebt, wenn sie alle N—1tionen zur nächstvorhergehenden Summe darstellt. Man erhält aber durch die Auflösung die hier einzig möglichen Union zur Summe n—(m—1) gewiss, folglich bekömmt man durch sie auch alle Binionen zur Summe n—(m—1) + 1 und deswegen wieder alle Ternionen zur Summe n—(m—1) + 2 und aus diesem Grunde wieder, alle Quaternionen zur Summe n—(m—1) + 3 u. s. f. so dass man durch die Auflösung auch gewiss alle Mtionen zur Summe n—(m—1)+m—1, oder welches einerlei ist, dass man alle Mtionen zur Summe n bekömmt.

Beispiele.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots \end{pmatrix}$$

^8E	^8E
1 1 1 1 4	a a a a d
1 1 1 2 3	a a a b c
1 1 1 3 2	a a a c b
1 1 1 4 1	a a a d a
1 1 2 1 3	a a b a c
1 1 2 2 2	a a b b b
1 1 2 3 1	a a b c a
1 1 3 1 2	a a c a b
1 1 3 2 1	a a c b a
1 1 4 1 1	a a d a a
1 2 1 1 3	a b a a c
1 2 1 2 2	a b a b b
1 2 1 3 1	a b a c a
1 2 2 1 2	a b b a b
1 2 2 2 1	a b b b a
1 2 3 1 1	a b c a a
1 3 1 1 2	a c a a b
1 3 1 2 1	a c a b a
1 3 2 1 1	a c b a a
1 4 1 1 1	a d a a a
2 1 1 1 3	b a a a c
2 1 1 2 2	b a a b b
2 1 1 3 1	b a a c a
2 1 2 1 2	b a b a b
2 1 2 2 1	b a b b a
2 1 3 1 1	b a c a a
2 2 1 1 2	b b a a b
2 2 1 2 1	b b a b a
2 2 2 1 1	b b b a a
2 3 1 1 1	b c a a a
3 1 1 1 2	c a a a b
3 1 1 2 1	c a a b a
3 1 2 1 1	c a b a a
3 2 1 1 1	c b a a a
4 1 1 1 1	d a a a a

An-

Anmerkung.

Die Auflöſung giebt Involutionen, wie ſo wohl aus dem ganzen Gange derſelben als auch aus den beiden gegebenen Beiſpielen deutlich erhellet.

§. 50. *a*).

Aufgabe.

Es wird die erſte, oder als Zahl betrachtet, die geringſte Complexion der m t e n Variationsklaſſe zur Summe *n* für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \varrho}{a,\ b,\ c\ \ldots\ r}$ geſucht, in welchem zwar $\varrho < n - m + 1$ aber $m\varrho > n$ gedacht wird.

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

Es iſt einleuchtend, daſs die jetzige Aufgabe und die des §. 32 die Darſtellung einer und derſelben Complexion verlangen, folglich iſt die Auflöſung der Aufgabe des §. 32 auch zugleich die Auflöſung der jetzigen Aufgabe.

§. 51.

Aufgabe.

Es wird $\overset{n}{\mathcal{M}}\binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \varrho}{a,\ b,\ c\ \ldots\ r}$ geſucht und zwar unter der Bedingung, daſs $\varrho < n - m + 1$ aber $m\varrho > n$ iſt.

Arith-

a) Um dieſe und die folgende Aufgabe zu verſtehn, hat man nur nöthig die Anmerkung des §. 31 auf die Variationen anzuwenden. Es muſs aber bei dieſer Anwendung das in der Anmerkung gegebene Beiſpiel für ^{15}E übergangen und ſtatt des darinn genannten §. 30 der §. 49 gedacht werden.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung. a)

Man suche nach §. 51 die erste Complexion, sehe diese als eine Zahl an und leite hieraus die zweite, aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Complexion her u. s. w. indem man immer unter der Bedingung, dafs ϱ die höchste Zifer ist, von der zuletzt gefundenen mzifrigen Zahl zur nächstgröfsern mzifrigen Zahl der Summe n nach folgenden allgemeinen Regeln fortgeht.

1) Man sucht in der Zahl, von der letzten Zifer an, von der Rechten nach der Linken die erste Zifer auf, welche gröfser ist als 1.

2) Hat man diese Zifer gefunden, so sucht man unter denen die ihr nach der Linken hin folgen, die erste Zifer auf welche hleiner als ϱ ist und vergröfsert diese um 1.

3) Man setzt für die Zifern, welche der vergröfserten, nach der Rechten hin folgen, blofs Einsen, vertheilt aber unter diese, von der letzten an, so das Supplement zur Summe n, dafs man einer jeden so viel davon giebt als ihr nur immer gegeben werden kann, ohne sie gröfser als ϱ zu machen.

Beweis.

Die erste Complexion, von der man hier ausgeht ist als Zahl betrachtet unter allen gesuchten Complexionen die kleinste. Da sich nun eine jede der verlangten Zahlencomplexionen als eine Zahl ansehn läfst, so ist klar, dafs die Auflösung alle Zahlencomplexionen giebt, wenn ihre drei

a) Für diese Auflösung ist in §. 6. kein arithmetischer Satz angegeben, woraus sie unmittelbar genommen werden könnte; der 13te Satz ist nur da anzuwenden wo der Zeiger unbegränzt ist.

drei allgemeinen Regeln so von der zuerst aufgestellten Complexion zu den übrigen führen, dass man allemal von einer Zahl zu der kömmt, die von ihr unter den Bedingungen der Aufgabe die nächstgrössere ist. Dass dies aber der Fall sey, fällt bei einer genauen Betrachtung der drei allgemeinen Regeln der Auflösung gleich in die Augen:

α) Nach der ersten und zweiten Regel substituirt man um die Zahl zu vergrössern für diejenige Zifer die nächstgrössere, die unter den Zifern die geringste Ordnung hat, welche kleiner als ϱ sind und auf welche nach der Rechten hin wenigstens eine Zifer folgt die grösser als 1 ist; von den Zifern also, die bei den Bedingungen der Aufgabe vergrössert werden dürfen, nimmt man dazu die Zifer, welche die geringste Ordnung hat, denn die zuvergrössernde Zifer darf der Aufgabe nach noch nicht gleich ϱ seyn und wegen §. 6, 9. Satz muss auf sie eine Zifer wenigstens folgen die grösser als die geringste Zifer 1 ist.

β) Nach der dritten Regel lässt man auf die um 1 vergrösserte Zifer erst Einsen folgen und supplirt dann die gegebene Summe so, dass die Zahl durch dies Suppliren um so wenig wächst als hierbei nur immer möglich ist. Wenn also nach der ersten und zweiten Regel der Auflösung eine Zifer vergrössert ist, so nimmt man nach der dritten Regel mit den übrigen Zifern die Veränderung vor, dass diese Vergrösserung der einen Zifer auf das Wachsen der Zahl überhaupt so wenig Einfluss hat, als sie nur immer darauf haben kann. (§. 6, 6 Satz, Anmerk. zum 13. Satze).

Vergrössert man aber in einer gegebenen Zahl diejenige Zifer um 1, welche unter denen die vergrössert werden dürfen die geringste Ordnung hat und nimmt mit den übrigen Zifern eine solche Veränderung vor, dass durch

durch gedachte Vergröſserung die Zahl ſo wenig als möglich wächſt, ſo erhält man auch gewiſs für die Bedingungen unter welchen die Vergröſserung vorgenommen iſt, die nächſtgröſsere Zahl.

Beiſpiel.

$$\binom{1\ 2\ 3\ 4}{a\ b\ c\ d}$$

$$^{15}E$$

12444	24342	34143	42432
13344	24414	34224	42441
13434	24423	34233	43134
13443	24432	34242	43143
14244	24441	34314	43224
14334	31344	34323	43233
14343	31434	34332	43242
14424	31443	34341	43314
14433	32244	34413	43323
14442	32334	34422	43332
21444	32343	34431	43341
22344	32424	41244	43413
22434	32433	41334	43422
22443	32442	41343	43431
23244	33144	41424	44124
23334	33234	41433	44133
23343	33243	41442	44142
23424	33324	42144	44214
23433	33333	42234	44223
23442	33342	42243	44232
24144	33414	42324	44241
24234	33423	42333	44313
24243	33432	42342	44322
24324	33441	42414	44331
24333	34134	42423	44412
			44421

§. 52.

Anmerkung.

Wenn die Zahlen 1, 2, 3, . . n, zur Summe n mit Wiederholungen variirt werden, ſo iſt die Anzahl der Com-

Complexionen der ersten Klasse gleich 1, der zweiten Klasse gleich $\frac{n-1}{1}$, der dritten Klasse gleich $\frac{n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2}$, der vierten Klasse gleich $\frac{n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, der fünften Klasse gleich $\frac{n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \,.\, n-4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ u. s. w. so dass die Zahl, welche die Anzahl der Complexionen der mten Klasse bestimmt, mit dem mten Binomialcoefficienten der n—1ten Dignität einerlei ist.

δ. Von den Variationen zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen.

§. 53.

Aufgabe.

Für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \nu}{a,\ b,\ c,\ d \ldots n}$ alle Variationen ohne Wiederholungen zur Summe ν darzustellen.

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man setze ν hin, so hat man ${}^{\nu}\!A$.

2) Man leite hieraus nach §. 35 die gutgeordneten Binionen her und schreibe unter diese die Versetzungen derselben, so hat man ${}^{\nu}\!B^{`}$.

3) Aus den gutgeordneten Binionen folgere man nach §. 35 die gutgeordneten Ternionen und setze unter diese wieder die Versetzungen derselben, so bekömmt man die dritte Klasse ${}^{\nu}C^{`}$.

4) Nach der nämlichen Vorschrift, welche für die Ableitung der dritten Klasse aus der zweiten gegeben ist,

 lasse

laſſe man wieder die vierte aus der dritten, die fünfte aus der vierten entſtehn u. ſ. w.

Beweis.

Man erhält durch die Auflöſung offenbar alle gutgeordnete und ſchlechtgeordnete Complexionen die für die gegebene Aufgabe möglich ſind; die verlangten Variationen ſind aber nichts anders als alle gutgeordnete und ſchlechtgeordnete Complexionen, welche den Bedingungen der Aufgabe entſprechen, folglich thut auch die Auflöſung der Aufgabe völlig Genüge.

Beiſpiele.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h \end{pmatrix}$$

8	$^8A'$	h	$^8A'$
1 7		a g	
2 6		b f	
3 5	$^8B'$	c e	$^8B'$
7 1		g a	
6 2		f b	
5 3		e c	
1 2 5		a b e	
1 3 4		a c d	
1 5 2		a e b	
2 1 5		b a e	
2 5 1	$^8C'$	b e a	$^8C'$
5 1 2		f a b	
5 2 1		f b a	
1 4 3		a d c	
3 1 4		c a d	
3 4 1		c d a	
4 1 3		d a c	
4 3 1		d c a	

Anmerkung.

Bisher haben die Auflöſungen wenn ſie das Verlangte der Aufgaben in Klaſſen darſtellten, gutgeordnete Klaſſen ge-

gegeben, die Auflöſung der jetzigen Aufgabe hingegen giebt ſchlechtgeordnete Klaſſen. Wird alſo mit der jetzigen Aufgabe noch ausdrücklich die Bedingung verbunden, daſs die Klaſſen gutgeordnete ſeyn ſollen, ſo muſs man die durch die Auflöſung gefundenen Complexionen wenn ſie Zahlencomplexionen ſind, ſo ordnen, daſs ſie wie wachſende Zahlen, und wenn ſie Buchſtabencomplexionen ſind, daſs ſie lexicographiſch fortlaufen. *a*).

Darſtellung einzelner Klaſſen der Variationen ohne Wiederholungen zu beſtimmten Summen.

§. 54.

Aufgabe.

Es wird die mte Klaſſe zur Summe ν für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ .\ .\ \nu}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\ .\ .\ n}$ geſucht.

Auflöſung.

Man ſuche nach der Auflöſung der Aufgabe des §. 36 die gutgeordneten Complexionen auf und ſchreibe unter dieſe die Verſetzungen derſelben.

a) Wenn man die Variationen zu beſtimmten Summen ohne Wiederholungen durch ein ſolches Verfahren finden will, welches bei andern Aufgaben die Klaſſen gutgeordnet gegeben hat, ſo übergeht man jederzeit einige Complexionen, nämlich diejenigen welche bei jenem Verfahren aus Complexionen mit Wiederholungen entſtehn würden. So z. B. erhält man bei Beobachtung der Methode, welche ſonſt bei Klaſſeninvolutionen gebraucht wird, für die Summe 8 in der dritten Klaſſe die Complexion 143 nicht, weil ſie aus der Binion 44 entſteht, wenn man dieſer das Element 1 vorſetzt und ihr letztes Element in das nächſtvorhergehende des Zeigers verwandelt.

Beweis.

Für die Richtigkeit dieser Auflösung gilt der nämliche eweis, der für die Auflösung der Aufgabe des vorhergehenden Paragraphs gegeben ist.

Beispiele.

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g}$$

	1 2 7	a b g	
	1 3 6	a c f	
	1 4 5	a d e	
	2 3 5	b c e	
	1 7 2	a g b	
	2 1 7	b a g	
	2 7 1	b g a	
	7 1 2	g a b	
	7 2 1	g b a	
${}^{10}C'$	1 6 3	a f c	${}^{10}C'$
	3 1 6	e a f	
	3 6 1	c f a	
	6 1 3	f a c	
	6 3 1	f c a	
	1 5 4	a e d	
	4 1 5	d a e	
	4 5 1	d e a	
	5 1 4	e a d	
	5 4 1	e d a	
	2 5 3	b e c	
	3 2 5	c b e	
	3 5 2	c e b	
	5 2 3	e b c	
	5 3 2	e c b	

Anmerkung.

Das allgemeine der Anmerkung und der dazugehörigen Note des §. 53 gehört auch hierher.

§. 55.

Anmerkung.

Um zu bestimmen, wie viele Variationen ohne Wiederholungen die mte Klasse zur Summe n enthält, hat man

man nur nöthig zu berechnen wie viele Combinationen ohne Wiederholungen die mte Combinationsklaſſe beſitzt (§. 37) und die gefundene Zahl durch die Verſetzungszahl 1 . 2 . 3 . 4 . . . m zu multipliciren.

Von dem Variiren mehrerer Reihen.

§. 56.

Erklärung.

In Rückſicht auf die Sätze welche in dieſem Paragraphe erklärt werden müſſen, wird auf §. 38 verwieſen. Man hat nämlich die hier aufzuſtellenden Sätze, wenn man in §. 38 ſtatt Combination, Variation lieſet und für die Combinationsklaſſenzeichen die Variationsklaſſenzeichen ſetzt.

Variationen überhaupt.

§. 57.

1. *Aufgabe.*

Für den hierunterſtehenden Zeiger die Variationen mit Wiederholungen zu finden.

$$\left\{\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3 & \\ a & b & c & = p \\ A & B & C & = q \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & = r \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & = s \end{array}\right\}$$

Auflösungen.

(1

a	b	c	$'A^{p}$
Aa	Ab	Ac	
Ba	Bb	Bc	$'B^{qp}$
Ca	Cb	Cc	
𝔞Aa	𝔞Ab	𝔞Ac	
𝔞Ba	𝔞Bb	𝔞Bc	
𝔞Ca	𝔞Cb	𝔞Cc	
𝔟Aa	𝔟Ab	𝔟Ac	
𝔟Ba	𝔟Bb	𝔟Bc	$'C^{rqp}$
𝔟Ca	𝔟Cb	𝔟Cc	
𝔠Aa	𝔠Ab	𝔠Ac	
𝔠Ba	𝔠Bb	𝔠Bc	
𝔠Ca	𝔠Cb	𝔠Cc	
𝔄𝔞Aa	𝔄𝔞Ab	𝔄𝔞Ac	
𝔄″𝔠Ca	𝔄″𝔠Cb	𝔄″𝔠Cc	
𝔅𝔞Aa	𝔅𝔞Ab	𝔅𝔞Ac	$'D^{srqp}$
𝔅″𝔠Ca	𝔅″𝔠Cb	𝔅″𝔠Cc	
ℭ𝔞Aa	ℭ𝔞Ab	ℭ𝔞Ac	
ℭ″𝔠Ca	ℭ″𝔠Cb	ℭ″𝔠Cc	

pag. 141.

2)

𝔄𝔞Aa	
𝔄𝔞Ab	
𝔄𝔞Ac	$'A^{p}$
𝔄𝔞Ba	
𝔄𝔞Bb	
𝔄𝔞Bc	
𝔄𝔞Ca	
𝔄𝔞Cb	
𝔄𝔞Cc	$'B^{qp}$
𝔄𝔟Aa	
″ ″	
𝔄𝔟Cc	
𝔄𝔠Aa	$'C^{rqp}$
″ ″	
𝔄𝔠Cc	
𝔅𝔞Aa	
″	
𝔅𝔠Cc	
ℭ𝔞Aa	
″	
ℭ𝔠Cc	$'D^{srqp}$

pag. 144.

2. Aufgabe.

Es werden für den hierunter gesetzten Zeiger die Variationen ohne Wiederholungen verlangt.

$$\left\{\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & 4 \\ a, & b, & c, & d = p \\ A, & B, & C, & D = q \\ 𝔞, & 𝔟, & 𝔠, & 𝔡 = r \\ 𝔄, & 𝔅, & ℭ, & 𝔇 = s \end{array}\right\}$$

Auf-

Auflösungen.

a	b	c	d	
				$\overset{p}{A}'$
	A b	A c	A d	
	B a	B c	B d	$\overset{qp}{B}'$
	C a	C b	C d	
	D a	D b	D c	
	𝔞 B c	𝔞 B d	𝔞 C b	
	𝔞 C d	𝔞 D b	𝔞 D c	
	𝔟 A c	𝔟 A d	𝔟 C a	
	𝔟 C d	𝔟 D a	𝔟 D c	$\overset{rqp}{C}'$
	𝔠 A b	𝔠 A d	𝔠 B a	
	𝔠 B d	𝔠 D a	𝔠 D b	
	𝔡 A b	𝔡 A c	𝔡 B a	
	𝔡 B c	𝔡 C a	𝔡 C b	
𝔄 𝔟 C d	𝔄 𝔟 D c	𝔄 𝔠 B d		
𝔄 𝔠 D b	𝔄 𝔡 B c	𝔄 𝔡 C b		
𝔅 𝔞 C d	𝔅 𝔞 D c	𝔅 𝔠 A d		$\overset{srqp}{D}'$
𝔅 𝔠 D a	𝔅 𝔡 A c	𝔅 𝔡 C a		
ℭ 𝔞 B d	ℭ 𝔞 D b	ℭ 𝔟 A d		
ℭ 𝔟 D a	ℭ 𝔡 A b	ℭ 𝔡 B a		
𝔇 𝔞 B c	𝔇 𝔞 C b	𝔇 𝔟 A c		
𝔇 𝔟 C a	𝔇 𝔠 A b	𝔇 𝔠 B a		

pag. 151.

3. *Aufgabe.*

Es soll für den Zeiger der zweiten Aufgabe die vierte Klasse der Variationen ohne Wiederholungen dargestellt werden.

Auflösung.

srqp
D

𝔄 𝔟 C d
𝔄 𝔟 D c
𝔄 𝔠 B d
𝔄 𝔠 D b
𝔄 𝔡 B c
𝔄 𝔡 C b
𝔅 𝔞 C d
𝔅 𝔞 D c
𝔅 𝔠 A d
𝔅 𝔠 D a
𝔅 𝔡 A c
𝔅 𝔡 C a
ℭ 𝔞 B d
ℭ 𝔞 D b
ℭ 𝔟 A d
ℭ 𝔟 D a
ℭ 𝔡 A b
ℭ 𝔡 B a
𝔇 𝔞 B c
𝔇 𝔞 C b
𝔇 𝔟 A c
𝔇 𝔟 C a
𝔇 𝔠 A b
𝔇 𝔠 B a

pag. 158.

Variationen zu bestimmten Summen.

§. 58.

1. *Aufgabe.*

Die Variationen mit Wiederholungen zur Summe 5 für hierunter befindlichen Zeiger zu entwickeln.

$$\left\{\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ a, & b, & c, & d, & e = p \\ A, & B, & C, & D, & E = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{e} = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{E} = s \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon = \pi \end{array}\right\}$$

Auf-

Auflösungen.

1)

c $^{5}A^{p}$

A d
B c $^{5}B^{qp}$
C b
B a

a A c
a B b $^{5}C^{rqp}$
a C a
b A b
b B a
c A a

A a A b
A a B a $^{5}D^{srqp}$
A b A a
B a A a

a A a A a $^{5}E^{tsrqp}$

pag. 161.

2)

a A a A a
A a A b
A a B a
a A c
A b A a
a B b
a C a
A d
B a A a
b A b
b B a
B c
c A a
C b
D a
e

pag. 166.

Anmerkung.

Das nämliche was in der Anmerkung zur ersten Aufgabe des §. 40 in Rücksicht auf die zweite Auflösung gesagt ist, muss auch hier in Hinsicht auf die zweite Auflösung erinnert werden.

2. Aufgabe.

Die vierte Klasse der Variationen mit Wiederholungen zur Summe 7 darzustellen.

$$\left\{\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & 4 \\ a, & b, & c, & d = p \\ A, & B, & C, & D = q \\ a, & b, & c, & d = r \\ A, & B, & C, & D = s \end{array}\right\}$$

Auflösung.

𝔄	𝔞	A	d
𝔄	𝔞	B	c
𝔄	𝔞	C	b
𝔄	𝔞	D	a
𝔄	𝔟	A	c
𝔄	𝔟	B	b
𝔄	𝔟	C	a
𝔄	𝔠	A	b
𝔄	𝔠	B	a
𝔄	𝔡	A	a
𝔅	𝔞	A	c
𝔅	𝔞	B	b
𝔅	𝔞	C	a
𝔅	𝔟	A	b
𝔅	𝔟	B	a
𝔅	𝔠	A	a
ℭ	𝔞	A	b
ℭ	𝔞	B	a
ℭ	𝔟	A	a
𝔇	𝔞	A	a

pag. 172.

3. *Aufgabe.*

Es sollen für die Summe 8 alle Variationen ohne Wiederholungen angegeben werden.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8	
a,	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h	= p
A,	B,	C,	D,	E,	F,	G,	H	= q
𝔞,	𝔟,	𝔠,	𝔡,	𝔢,	𝔣,	𝔤,	𝔥	= r

Auflösung.

h	8 $\overset{p}{A}$'
A g	
B f	
C e	8 $\overset{qp}{B}$'
G a	
F b	
E c	
𝔞 B c	
𝔞 C e	
𝔞 E d	
𝔟 A b	
𝔟 E a	
𝔣 A b	8 $\overset{rqp}{C}$'
𝔣 B a	
𝔞 D c	
𝔠 A d	
𝔠 D a	
𝔡 A c	
𝔡 C a	

pag. 178.

4. Aufgabe.

Es wird die dritte Klasse der Variationen ohne Wiederholungen zur Summe 11 verlangt.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11	
a,	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i,	k,	l	= p
A,	B,	C,	D,	E,	F,	G,	H,	I,	K,	L	= q
𝔞,	𝔟,	𝔠,	𝔡,	𝔢,	𝔣,	𝔤,	𝔥,	𝔦,	𝔨,	𝔩	= r

Auf-

Auflösung.

a B g
a C f
a D e
b C e
a G b
b A g
b G a
g A b
g B a
a F c
c A f
c F a
f A c
f C a
a E d
d A e
d E a
e A d
e D a
b E c
c B e
c E b
e B b
e C b

pag. 180.

§. 59.

Anmerkung.

Aus einer jedem durch Klassenzeichen ausgedrückten Gleichung für die Variationen einer und derselben Elementenreihe, läſst sich leicht eine Gleichung für die Variationen mehrerer Reihen machen. Folgende Gleichungen sollen als Beispiele dienen:

$$ {}'\overset{..tsrqp}{J} = {}'\overset{p}{A} + {}'\overset{qp}{B} + {}'\overset{rqp}{C} + {}'\overset{srqp}{D} + \ldots $$

$$ {}^{n}\overset{..tsrqp}{J} = {}^{n}\overset{p}{A} + {}^{n}\overset{qp}{B} + {}^{n}\overset{pqp}{C} + {}^{n}\overset{srqp}{D} + \ldots $$

$$ \left\{ \begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots = p \\ A, & B, & C, & D \ldots = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \ldots = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D} \ldots = s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \;\ldots \end{array} \right\} $$

6. Gleichungen für die Combinationen und Variationen.

§. 60.

Bei der Entwickelung der Combinationen und Variationen ſind jedesmal die Gleichungen aufgeſtellt, welche jede Darſtellung des Geforderten darboth; jetzt ſollen noch die entwickelt werden, welche ſich darbiethen, wenn man die Combinationen überhaupt mit den Combinationen zu beſtimmten Summen und ſo auch die Variationen überhaupt mit den Variationen zu beſtimmten Summen vergleicht und auſser dieſen Gleichungen ſollen noch die dargeſtellt werden, welche die Beziehung der Combinationen und Variationen auf einander giebt.

§ 61.

Eine jede Combination überhaupt kann als eine Combination zu einer beſtimmten Summe und umgekehrt, eine jede Combination zu einer beſtimmten Summe kann als eine Combination überhaupt betrachtet werden. Es läſst ſich daher eine jede *m*te Klaſſe der Combinationen überhaupt (mit oder ohne Wiederholungen) als ein Inbegriff

griff mehrerer mten Klassen der Combinationen (mit oder ohne Wiederholungen) zu verschiedenen bestimmten Summen und zwar zu allen den Summen ansehn, für welche, dem gegebene Zeiger nach, eine mte Klasse statt findet. Eben dies nämliche gilt auch von den Variationen.

a) Gleichungen für die Combinationen mit Wiederholungen.

§. 62.

Es ist für dem Zeiger

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots}{a,\ b,\ c,\ d,\ e\ \ldots}$$

$$\begin{array}{rl} {}'A = & {}^1A + {}^2A + {}^3A + {}^4A + {}^5A + \ldots \\ {}'B = & \phantom{{}^1A +{}} {}^2B + {}^3B + {}^4B + {}^5B + \ldots \\ {}'C = & \phantom{{}^1A + {}^2A +{}} {}^3C + {}^4C + {}^5C + \ldots \\ {}'D = & \phantom{{}^1A + {}^2A + {}^3A +{}} {}^4D + {}^5D + \ldots \\ '' & \phantom{{}^1A + {}^2A + {}^3A + {}^4A + {}} '' \end{array}$$

Addirt man die hier über einanderstehenden Klassen so erhält man die Gleichung;

$$\left.\begin{array}{r} {}'A \\ +{}'B \\ +{}'C \\ +{}'D \\ '' \end{array}\right\} = {}^1A + \left.\begin{array}{r}{}^2A\\+{}^2B\end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r}{}^3A\\+{}^3B\\+{}^3C\end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r}{}^4A\\+{}^4B\\+{}^4C\\+{}^4D\end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r}{}^5A\\+{}^5B\\+{}^5C\\+{}^5D\\''\end{array}\right\} + \ldots,$$

Zu-

Zusatz.

Es ist für den Zeiger

$$\left[\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots & \\ a, & b, & c, & d \ldots & = p \\ A, & B, & C, & D \ldots & = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \ldots & = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D} \ldots & = s \\ '' & '' & '' & '' & '' \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{p}{'A} \\ + \overset{pq}{'B} \\ + \overset{rqp}{'C} \\ + \overset{srqp}{'D} \\ '' \end{array}\right\} = {}^1\overset{p}{A} + \left.\begin{array}{r} {}^2\overset{p}{A} \\ {}^2\overset{qp}{B} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} {}^3\overset{p}{A} \\ + {}^3\overset{qp}{B} \\ + {}^3\overset{rqp}{C} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} {}^4\overset{p}{A} \\ + {}^4\overset{qp}{B} \\ + {}^4\overset{rqp}{C} \\ + {}^4\overset{srqp}{D} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} {}^5\overset{p}{A} \\ + {}^5\overset{qp}{B} \\ + {}^5\overset{rqp}{C} \\ + {}^5\overset{srqp}{D} \end{array}\right\} + \ldots$$

β) Gleichungen für die Combinationen ohne Wiederholungen.

§. 63.

Für den ersten Zeiger des vorhergehenden Paragraphs ist.

$$\begin{array}{ll} A^{\backprime} = & {}^1A^{\backprime} + {}^2A^{\backprime} + {}^3A^{\backprime} + {}^4A^{\backprime} + {}^5A^{\backprime} + {}^6A^{\backprime} + \ldots \\ B^{\backprime} = & \qquad\qquad\quad {}^3B^{\backprime} + {}^4B^{\backprime} + {}^5B^{\backprime} + {}^6B^{\backprime} + \ldots \\ C^{\backprime} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + {}^6C^{\backprime} + \ldots \\ '' & \end{array}$$

Die Addition der übereinanderstehenden Klassen giebt diese Gleichung:

$A^{\backprime}$

$$\left.\begin{array}{l} A' \\ +B' \\ +C' \\ {}'' \end{array}\right\} = {}^1A' + {}^2A' + \left.\begin{array}{l} {}^3A' \\ +{}^3B' \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^4A' \\ +{}^4B' \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^5A' \\ +{}^5B' \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^6A' \\ +{}^6B' \\ +{}^6C' \end{array}\right\} + \cdot$$

Zusatz.

Für den zweiten Zeiger des vorigen Paragraphs ist

$$\left.\begin{array}{l} \overset{p}{A}' \\ +\overset{qp}{B}' \\ +\overset{rqp}{C}' \\ {}'' \end{array}\right\} = {}^1\overset{p}{A}' + {}^2\overset{p}{A}' + \left.\begin{array}{l} {}^3\overset{p}{A} \\ +{}^3\overset{qp}{B} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^4\overset{p}{A}' \\ +{}^4\overset{qp}{B} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^5\overset{p}{A}' \\ +{}^5\overset{qp}{B} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^6\overset{p}{A}'' \\ +{}^6\overset{qp}{B} \\ +{}^6\overset{rqp}{C} \end{array}\right\} + \cdots$$

γ) Gleichungen für die Variationen mit Wiederholungen.

§. 64.

Für den ersten Zeiger des §. 62 ist

$$\begin{array}{l} {}'A = {}^1A + {}^2A + {}^3A + {}^4A + {}^5A + \ldots. \\ {}'B = \qquad {}^2B + {}^3B + {}^4B + {}^5B + \ldots. \\ {}'C = \qquad\qquad {}^3C + {}^4C + {}^5C + \ldots. \\ {}'D = \qquad\qquad\qquad + {}^4D + {}^5D + \ldots. \\ {}'' \end{array}$$

Dies

Anmerkung. Für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix} 1, & 2, & 3.. \\ a, & b, & c.. \end{smallmatrix}\right)$ ist die geringste Summe einer Binion ohne Wiederholungen gleich 1+2, die geringste einer Ternion gleich 1+2+3, die geringste einer Quaternion gleich 1+2+3+4, u. s. f. und eben so verhält es sich bei den Variationen ohne Wiederholungen.

Dies giebt diese Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} {}'A \\ +{}'B \\ +{}'C \\ +{}'D \\ \;'' \end{array}\right\} = {}^{1}A + \left.\begin{array}{l} {}^{2}A \\ +{}^{2}B \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^{3}A \\ +{}^{3}B \\ +{}^{3}C \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^{4}A \\ +{}^{4}B \\ +{}^{4}C \\ +{}^{4}D \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^{5}A \\ +{}^{5}B \\ +{}^{5}C \\ +{}^{5}D \\ \;'' \end{array}\right\} + \ldots;$$

Zusatz.

Für den zweiten Zeiger des §. 62. ist

$$\left.\begin{array}{l} {}'\overset{p}{A} \\ +{}'\overset{pq}{B} \\ +{}'\overset{rqp}{C} \\ +{}'\overset{srqp}{D} \\ \;'' \end{array}\right\} = {}^{1}\overset{p}{A} + \left.\begin{array}{l} {}^{2}\overset{p}{A} \\ {}^{2}\overset{qp}{B} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^{3}\overset{p}{A} \\ +{}^{3}\overset{qp}{B} \\ +{}^{3}\overset{rqp}{C} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^{4}\overset{p}{A} \\ +{}^{4}\overset{qp}{B} \\ +{}^{4}\overset{rqp}{C} \\ +{}^{4}\overset{srqp}{D} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^{5}\overset{p}{A} \\ +{}^{5}\overset{qp}{B} \\ +{}^{5}\overset{rqp}{C} \\ +{}^{5}\overset{srqp}{D} \end{array}\right\} + \ldots;$$

δ) Gleichungen für die Variationen ohne Wiederholungen.

§. 65.

Für den ersten Zeiger des §. 62 ist

$$\begin{array}{lllllll} A` = {}^{1}A` & +{}^{2}A` & +{}^{3}A` & +{}^{4}A` & +{}^{5}A` & +{}^{6}A` & +\ldots \\ B` = & & {}^{3}B` & +{}^{4}B` & +{}^{5}B` & +{}^{6}B` & +\ldots \\ C` = & & & & & +{}^{6}C` & +\ldots \\ '' & & & & & & \end{array}$$

 Wird

Wird hier das übereinanderſtehende addirt, ſo erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{matrix}+A'\\+B'\\+C'\end{matrix}\right\}_{''} = {}^1A' \quad {}^2A' + \left.\begin{matrix}{}^3A'\\+{}^3B'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^4A'\\+{}^4B'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^5A'\\+{}^5B'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^6A'\\+{}^6B'\\+{}^6C\end{matrix}\right\}$$

Zuſatz.

Es iſt für den zweiten Zeiger des §. 62

$$\left.\begin{matrix}\overset{p}{A}'\\+\overset{}{B}'\\+\overset{rqp}{C}''\end{matrix}\right\}_{''} = {}^1\overset{p}{A}' + {}^2\overset{p}{A}' + \left.\begin{matrix}{}^3\overset{p}{A}'\\+{}^3\overset{qp}{B}'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^4\overset{p}{A}'\\+{}^4\overset{qp}{B}'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^5\overset{p}{A}'\\+{}^5\overset{qp}{B}'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^6\overset{p}{A}'\\+{}^6\overset{qp}{B}'\\+{}^6\overset{rqp}{C}''\end{matrix}\right\} +$$

§. 66.

Erklärung.

Wenn Complexionen, die ſich bloſs durch die Anordnung ihrer Elemente von einander unterſcheiden, als identiſche betrachtet werden, ſo hat man den Inbegriff derſelben, wenn man ſie zählt, eine davon hinſchreibt und dieſer die gefundene Zahl vorſetzt *a*). Wird alſo in einer Variationsklaſſe jede gutgeordnete Complexion mit den ſchlecht-

*) Eine Complexion iſt z. B. mit ihren Verſetzungen völlig gleichgültig, wenn man die Complexionen als Summen oder Produkte betrachtet, alſo ihre Elemente durch die Addition oder Multiplication verbunden denkt.

ſchlechtgeordneten als gleichgültig angeſehn, die aus ihr durch die Verſetzung ihrer Elemente entſpringen, ſo braucht man nur um die mte Variationsklaſſe zu erhalten, alle ihre gutgeordnete Mtionen aufzuſuchen und einer jeden derſelben die ihr zugehörige Verſetzungszahl vorzuſetzen. Oder man hat die mte Variationklaſſe der Elemente a, b, c, d . . ., wenn man die mte Combinationsklaſſe dieſer Elemente hinſchreibt und jeder Combination gedachte Verſetzungszahl vorſetzt.

Will man anzeigen, daſs man ſich einer jeden Complexion einer Combinationsklaſſe die Verſetzungszahl vorgeſchrieben denkt, ſo ſchreibt man vor das Klaſſenzeichen einen ihm gleichnamigen kleinen deutſchen Buchſtaben. Dieſer Buchſtabe wird dann P o l y n o m i a l c o e f f i c i e n t genannt. Z, B. $\mathfrak{c}C$. Hieraus erhellet auch was unter $\mathfrak{j}J$ zu verſtehen iſt.

Anmerkung.

Ietzt ſollen die Gleichungen aufgeſtellt werden, welche unter der Vorausſetzung gelten, daſs eine Combination mit ihren Verſetzungen einerlei iſt

ζ) Gleichungen zwiſchen Combinationen und Variationen mit Wiederholungen.

§. 67.

1)

Es iſt $'\mathcal{A} = \mathfrak{a}\,'A$, $'\mathcal{B} = \mathfrak{b}\,'B$, $'\mathcal{C} = \mathfrak{c}\,'C$, $'\mathcal{D} = \mathfrak{d}\,'D$ u. ſ. w.

alſo $'\mathcal{A} + '\mathcal{B} + '\mathcal{C} + '\mathcal{D} + \ldots = \mathfrak{a}\,'A + \mathfrak{b}\,'B + \mathfrak{c}\,'C + \mathfrak{d}\,D + \ldots$

3)

Wegen §. 63 ist

$$
\begin{array}{l}
{}_a{}'A = {}_a{}^1A + {}_a{}^2A + {}_a{}^3A + {}_a{}^4A + \dots \\
{}_b{}'B = \qquad\quad {}_b{}^2B + {}_b{}^3B + {}_b{}^4B + \dots \\
{}_c{}'C = \qquad\qquad\quad {}_c{}^3C + {}_c{}^4C + \dots \\
{}_d{}'D = \qquad\qquad\qquad\quad {}_d{}^4D + \dots \\
\text{''}
\end{array}
$$

daher

$$
\left.\begin{array}{l}
{}_a{}'A \\
+ {}_b{}'B \\
+ {}_c{}'C \\
+ {}_d{}'D \\
\text{''}
\end{array}\right\} = {}_a{}^1A + \left.\begin{array}{l} {}_a{}^2A \\ + {}_b{}^2B \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a{}^3A \\ + {}_b{}^3B \\ + {}_c{}^3C \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a{}^4A \\ + {}_b{}^4B \\ + {}_c{}^4C \\ + {}_d{}^4D \end{array}\right\} + \dots
$$

Die erste Seite dieser Gleichung ist die zweite Seite der letzten Gleichung in 1), folglich können diese beiden Seiten gegen einander umgetauscht werden, also ist auch

$$
\left.\begin{array}{l}
'\mathit{A} \\
+ '\mathit{B} \\
+ \mathit{C} \\
+ '\mathit{D}
\end{array}\right\} = {}_a{}^1A + \left.\begin{array}{l} {}_a{}^2A \\ {}_b{}^2B \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a{}^3A \\ + {}_b{}^3B \\ + {}_c{}^3C \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a{}^4A \\ + {}_b{}^4B \\ + {}_c{}^4C \\ + {}_d{}^4D \end{array}\right\} + \dots
$$

ε) Gleichungen zwischen Combinationen und Variationen ohne Wiederholungen.

§. 68.

1)

Es ist $A^\backprime = {}_a\mathrm{A}^\backprime,\ B^\backprime = {}_b\mathrm{B}^\backprime,\ C^\backprime = {}_c\mathrm{C}^\backprime,\ D^\backprime = {}_d\mathrm{D}^\backprime$
u. s. w

also $A^\backprime + B^\backprime + C^\backprime + D^\backprime + \ldots = {}_a\mathrm{A}^\backprime + {}_b\mathrm{B}^\backprime + {}_c\mathrm{C}^\backprime + {}_d\mathrm{D}^\backprime + \ldots$

2)

Wegen §. 63 ist

$$\begin{array}{lllllll}
{}_a\mathrm{A}^\backprime = {}_a^1\mathrm{A}^\backprime + {}_a^2\mathrm{A}^\backprime & + {}_a^3\mathrm{A}^\backprime & + {}_a^4\mathrm{A}^\backprime & + {}_a^5\mathrm{A}^\backprime & + {}_a^6\mathrm{A}^\backprime & + \ldots \\
{}_b\mathrm{B}^\backprime = & {}_b^3\mathrm{B}^\backprime & + {}_b^4\mathrm{B}^\backprime & + {}_b^5\mathrm{B}^\backprime & + {}_b^6\mathrm{B}^\backprime & \\
{}_c\mathrm{C}^\backprime = & & & & {}_c^6\mathrm{C}^\backprime & \\
'' & & & & &
\end{array}$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l} {}_a\mathrm{A}^\backprime \\ + {}_b\mathrm{B}^\backprime \\ + {}_c\mathrm{C}^\backprime \\ '' \end{array}\right\} = {}_a^1\mathrm{A}^\backprime + {}_a^2\mathrm{A}^\backprime + \left.\begin{array}{l} {}_a^3\mathrm{A}^\backprime \\ {}_b^3\mathrm{B}^\backprime \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^4\mathrm{A}^\backprime \\ {}_b^4\mathrm{B}^\backprime \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^5\mathrm{A}^\backprime \\ {}_b^5\mathrm{B}^\backprime \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^6\mathrm{A}^\backprime \\ {}_b^6\mathrm{B}^\backprime \\ {}_c^6\mathrm{C}^\backprime \end{array}\right\} + \ldots$$

also auch wegen der letzten Gleichung in 1)

$$\left.\begin{array}{l} A^\backprime \\ + B^\backprime \\ + C^\backprime \\ '' \end{array}\right\} = {}_a^1\mathrm{A}^\backprime + {}_a^2\mathrm{A}^\backprime + \left.\begin{array}{l} {}_a^3\mathrm{A}^\backprime \\ {}_b^3\mathrm{B}^\backprime \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^4\mathrm{A}^\backprime \\ {}_b^4\mathrm{B}^\backprime \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^5\mathrm{A}^\backprime \\ {}_a^3\mathrm{B}^\backprime \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^6\mathrm{A}^\backprime \\ {}_b^6\mathrm{B}^\backprime \\ {}_c^6\mathrm{C}^\backprime \end{array}\right\} + \ldots$$

 §. 69.

§. 69.

Anmerkung.

Die Gleichungen in §. 63 — §. 66 stellen ganz deutlich das Verhältniſs vor Augen, in welchen die Combinationen überhaupt mit den Combinationen zu bestimmten Summen und in welchen die Variationen überhaupt mit den Variationen zu bestimmten Summen stehn. Die Gleichungen des §. 67. und §. 68 machen mit dem Verhältnisse der Variationenen zu den Combinationen bekannnt.

Drit-

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis.

I) Erklärung analytischer Zeichen.

§. 70.

α) *Bezeichnung der Reihen.*

Reihe überhaupt wird durch S (Series) angedeutet. Spricht man von der ersten, zweiten, dritten u. s. w. *m*ten Reihe so bezeichnet man dieses durch S1, S2, S3 u. s. w. Sm.

Zur Bezeichnung einzelner Reihen ausser der Ordnung gebraucht man die kleinen lateinischen Buchstaben p, q, r, s u. s. w. auch wohl die griechischen π, ϱ, σ, τ u. s. f. Z. B. $Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots = p$.

β) *Bezeichnung der Coefficienten.*

Coefficient wird durch c, k oder κ und die Ausdrücke, erster, zweiter, dritter, vierter u. s. w. *m*ter Coefficient werden daher durch κ1, κ2, κ3,

$\varkappa 3$, $\varkappa 4$ u. f. w. $\varkappa m$ oder auch durch $c1$, $c2$, $c3$, $c4$ u. f. f. cm angedeutet. Das Zeichen der Reihen von deren Coefficienten die Rede ist, wird links vor diese Zeichen geschrieben. Hiernach heifst z. B. $p\varkappa m$, der *m*te Coefficient der Reihe p; $\frac{r}{s}\varkappa(n+1)$, der $n+1$te Coefficient des Quotienten der Reihe r durch die Reihe s; $y^n\varkappa(m+3)$, der $m+3$te Coefficient der *n*ten Dignität der Reihe y.

Zu den allgemeinen Coefficienten einer Reihe werden die Buchstaben eines lateinischen, deutschen oder eines andern Alphabets genommen, so dass man den ersten Buchstaben eines Alphabets gewöhnlich zum ersten, den zweiten Buchstaben zum zweiten Coefficienten nimmt u. f. w. Die blofs angenommenen Coefficienten unterscheidet man von den gegebenen dadurch, dass man über jene einen Punkt setzt, über diese aber nicht. In der Reihe $Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$ sieht man also die Coefficienten als gegebene an, hingegen in der Reihe $\dot{A}z + \dot{B}z^2 + \dot{C}z^3 + \dot{D}z^4 + \cdots$, als angenommene. Häufig werden auch die Zeichen $\varkappa 1$, $\varkappa 2$, $\varkappa 3$ u. f. f. für die Reihencoefficienten selbst gesetzt und zwar so wie sie hier jetzt angegeben sind für gegebene und mit einem Punkte darüber für angenommene Coefficienten. Sie sind also in diesem Falle Stellvertreter der eigentlichen Coefficienten, daher man auch das Zeichen $\varkappa$, wenn es so gebraucht wird, ein Localzeichen nennt.

γ) *Bezeichnung der Glieder.*

Glied deutet man durch t oder 𝔱 (terminus) an und daher die Ausdrücke erstes, zweites, drittes u. f. f. *m*tes Glied durch 𝔱1, 𝔱2, 𝔱3...𝔱m oder auch durch $t1$, $t2$, $t3 \ldots tm$. Die Zeichen der Reihen auf welche sich ein solches Gliedzeichen beziehen soll, werden ihm vorgeschrieben. Will man also, *m*tes Glied der Reihe *p*, *n*tes Glied des Produkts qp, $m+n$tes Glied des Quotienten $\frac{p}{q}$, durch Zeichen ausdrücken, so schreibt

man:

man: $p7m$, $qp7n$, $\frac{p}{q}7(m+n)$. *a*). Oft setzt man die Zeichen $p71$, $p72$, $p73$ u. s. f, statt der Glieder selbst, in die Reihe p, so dass sie also Stellvertreter der eigentlichen Glieder werden. In diesem Falle wird 7 dann ebenfalls ein Localzeichen genannt *b*).

δ) *Bezeichnung der Exponenten.*

Exponent wird im allgemeinen mit e oder ε bezeichnet. Die Zeichen $p^m71(e)$, $p^m72(e)$, $p^m73(e)$ u. s. f. $p^m7n(e)$ zeigen daher in der Ordnung wie sie genannt sind, den Exponenten des ersten, zweiten, dritten u. s. f. nten Gliedes der mten Dignität der Reihe p an.

Bei den Reihen ist es sehr vortheilhaft zu den allgemeinen Exponenten Buchstaben zu nehmen, die mit denen gleichnamig sind, die man zu den Coefficienten genommen hat. Z. B. $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$, $\mathfrak{A}z^{\mathfrak{a}} + \mathfrak{B}z^{\mathfrak{b}} + \mathfrak{C}z^{\mathfrak{c}} + \mathfrak{D}z^{\mathfrak{d}} + \ldots$.

N 5 Wenn

a) Wird von dem *m*ten Coefficienten des *n*ten Gliedes des Produkts der Reihen q, p gesprochen, so wird dieses durch $qp7n(\varkappa)m$ angezeigt. Hieraus erhellet wie in andern Fällen die Zeichen $\varkappa$ und 7 und die Zeichen der Reihen neben einander geschrieben werden müssen.

b) Wenn die Zeichen $\varkappa$ und 7 in einer Formel als Localzeichen vorkommen, so heisst diese Formel, Localformel. Will man anzeigen, dass sich das $\varkappa$ einer solchen Formel auf die Coefficienten a, b, c, d u. s. f. der Reihe p bezieht z. B. $\varkappa1$ auf a, $\varkappa2$ auf b, $\varkappa3$ auf c u. s. w., so setzt man unter die Formel das Zeichen p (a, b, c, d....), welches dann Scale genannt wird. Es können auch Scale und Zeiger durch ein einziges Zeichen angedeutet werden, z. B. durch $p\binom{a,\ b,\ c,\ d,\ e, \ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots}$, wenn p (a, b, c, d, e...) die Scale und $\binom{b,\ c,\ d,\ e \ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots}$ der Zeiger ist.

Wenn A, B, C die Coefficienten der Dignitäten z^a, z^b, z^c; ferner $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Coefficienten der $z^{\mathfrak{a}}$, $z^{\mathfrak{b}}$, $z^{\mathfrak{c}}$ sind, so dass also ABC der Coefficient der Dignität $z^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}$ ist und man setzt nun $ABC + \mathfrak{ABC} = P$, so pflegt man $ABCz^{a+b+c} + \mathfrak{ABC}z^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = Pz^*$ zu setzen, wo also * einen veränderlichen relativen Exponenten bedeutet. Dies wird zur Erläuterung folgender Erklärung dienen:

Wenn man S als eine Summe von Produkten und einen jeden Factor dieser Produkte als einen Coefficienten einer Dignität von z ansieht und nun anzeigen will, dass ein jedes jener Produkte durch die Dignität der z multiplicirt gedacht wird, von welchen es, seiner Factoren wegen, Coefficient ist, so schreibt man neben S das Zeichen z^* *a*).

II. Combinatorische Entwickelung der Produkte.

§. 71.

Allgemeine Wahrheiten, welche die Multiplication der Reihen betreffen.

1) Wenn mehrere Reihen unter sich multiplicirt werden, so stimmt die Handlung die hierbei vorgenommen wird, um die einzelnen Theile des Produkts zu erhalten, völlig mit dem Variiren dieser Reihen überein. Bei der Multiplication zweier Reihen p und q z. B. werden successiv jedem Gliede der Reihe p die einzelnen Glieder der Reihe q vorgeschrieben und eben dieses ist auch der Fall, wenn man nach §. 57 alle Variationen dieser Reihen sucht. Um das Produkt dreier Reihen p, q, r zu erhalten schreibt man jedem Gliede des Produkts qp successiv

a) Das Zeichen * wird sehr häufig auch noch in andern Fällen so relativ, als hier gebraucht, nämlich da wo seine Relation und daher sein relativer Werth leicht in die Augen fällt. Ein Beispiel hiervon findet man pag. 112. 4. Zusatz.

ceſſiv die einzelnen Glieder der dritten Reihe r vor und auf die nämliche Weiſe erhält man auch nach §. 57 aus den Variationen zweier Reihen qp durch die dritte r alle Variationen dieſer drei Reihen. Es iſt alſo das Produkt der m Reihen p, q, r ... x, y der Inbegriff aller Variations-mtionen derſelben welche §. 57 giebt, folglich

gleich $\overset{yx..rqp}{{}'\mathcal{M}}$. *a*).

2) Wenn ſich der hierunterſtehende Zeiger

$$\left[\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots \\ A,\ B,\ C,\ D,\ E\ \ldots = p \\ a.\ b,\ c,\ d,\ e\ \ldots = q \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E}\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon\ \ldots = x \end{array}\right]$$

auf m Reihen bezieht, ſo iſt das Produkt dieſer Reihen

gleich $\overset{x..rqp}{{}'\mathcal{M}} = \overset{x..rpq}{{}^{m}\mathcal{M}} + \overset{x..rqp}{{}^{m+1}\mathcal{M}} + \overset{x..rqp}{{}^{m+2}\mathcal{M}} + \overset{x..rqp}{{}^{m+3}\mathcal{M}} + \ldots$

(§. 64). Man erhält alſo für den gegebenen Zeiger auch das Produkt ſeiner m Reihen, wenn man nach §. 49 alle Variations-mtionen derſelben zur Summe m, m+1, m+2, m+3 u. ſ. f. aufſucht.

3) Wenn m Reihen, deren jede die nämliche Gröſse z enthält und die Form $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$ hat, unter ſich multiplicirt werden ſollen, ſo erhält man das Produkt, wenn man die Coefficienten der Reihen erſtlich für ſich unter ſich multiplicirt und hierauf neben jedes gefundene Coefficientenprodukt eine Dignität der z ſchreibt deren Exponent die Summe der Exponenten derjenigen Dignitäten von z iſt, zu welchen die Factoren des

a) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daſs die einzelnen Elemente jeder Mtion durch die Multiplication zu verbinden ſind und daſs daher das Zeichen + oder — einer jeden Mtion von den Zeichen ihrer Elemente abhängt.

des Coefficientenprodukts als Coefficienten gehören. Denn werden z. B. die beiden Reihen $Az^a + Bz^b + Cz^c$ und $\mathfrak{A}z^a + \mathfrak{B}z^b + \mathfrak{C}z^c$ nach der gewöhnlichen Methode unter sich multiplicirt so bekömmt man das Produkt:

$$\mathfrak{A}Az^{a+a} + \mathfrak{A}Bz^{a+b} + \mathfrak{A}Cz^{a+c} + \mathfrak{B}Cz^{b+c} + \mathfrak{C}Cz^{c+c},$$
$$+ \mathfrak{B}Az^{b+a} + \mathfrak{B}Bz^{b+b} + \mathfrak{C}Bz^{c+b}$$
$$+ \mathfrak{C}Az^{c+a}$$

welches man offenbar erhalten würde, wenn man erstlich die beiden Reihen $A + B + C$ und $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ unter sich multiplicirte und hierauf neben einen jeden einzelnen Theil des ganzen Produkts eine Dignität der z schriebe, deren Exponent eine solche Summe ist, als vorhin angegeben wurde.

4) Macht man sich für die Coefficienten der Reihen

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$$
$$\mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \ldots$$
$$\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots,$$

den Zeiger

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ A, & B, & C, & D\ldots, \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}\ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta\ldots \end{matrix}\right\}$$

so ist jedesmal ein Produkt mehrerer dieser Coefficienten eine Complexion zu einer bestimmten Summe und zwar zu der Summe, welche gleich dem Exponenten derjenigen Dignität von z ist, zu welcher das Produkt als Coefficient gehört. Z. B. $A\mathfrak{C}\delta$ ist eine Ternion zur Summe 8 und zugleich ein Coefficient der z^8.

§. 72.

1. *Aufgabe.*

Es wird das Produkt folgender m Reihen gesucht

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots = \pi$$
$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots = \varrho$$
$$\mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 + \mathfrak{d}z^4 + \ldots = \sigma$$
$$\mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \ldots = \tau$$
$$\text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃}$$

Auf-

Auflösung.

1) Man suche nach §. 49 für den Zeiger

$$\left[\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \\ a,\ b,\ c,\ d \ldots = p \\ A,\ B,\ C,\ D \ldots = q \\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d} \ldots = r \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D} \ldots = s \\ \text{〃 〃 〃 〃 \quad 〃} \end{array}\right]$$

die mte Klasse zur Summe m, zur Summe m+1, zur Summe m+2, u. s. f.

2) Man multiplicire die mte Klasse zur Summe m mit z^m, die mte Klasse zur Summe m+1 mit z^{m+1}, die mte Klasse zur Summe m+2 mit z^{m+2}, u. s. f.

Der Inbegriff des Gefundenen ist das verlangte Produkt, folglich ist dieses gleich

$$ {}^{m}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{m} + {}^{m+1}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{m+1} + {}^{m+2}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{m+2} $$
$$ + {}^{m+3}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{m+3} + \ldots\ldots \ a). $$

Beweis.

Man erhält das Produkt der gegebenen Reihen, wenn man erstlich die Reihen unter sich multiplicirt, welche die Coefficienten für sich, also unabhängig von den Dignitäten der z, ausmachen und wenn man hierauf ein jedes der erhaltenen Produkte mit derjenigen Dignität der z multiplicirt zu der dasselbe als Coefficient, gehört. (§. 71. 3).

Das

a) Besitzt eine jede der m Reihen n Glieder, so ist die höchste Dignität der z gleich z^{mn}.

Das Produkt der Reihen, welche die Coefficienten für sich bilden, ist aber für den Zeiger der Auflösung gleich

$$\overset{.\,rqp}{{}^{m}\mathcal{M}} + \overset{..\,rqp}{{}^{m+1}\mathcal{M}} + \overset{..\,rqp}{{}^{m+2}\mathcal{M}} + \overset{..\,rqp}{{}^{m+3}\mathcal{M}} + \overset{..\,rqq}{{}^{m+4}\mathcal{M}} + \ldots$$

(§. 71, 2)) und eine jede Mtion zur Summe m ist hier ein Coefficient der z^m, eine jede Mtion zur Summe $m+1$ ist hier ein Coefficient der z^{m+1}, u. s. f. (§. 71, 4)), folglich ist auch das gesuchte Produkt das in der Auflösung angegebene.

1. Beispiel.

Es soll das Produkt der ersten beiden Reihen der Aufgabe entwickelt werden.

* * *

Hier ist $\mathcal{M} = B$ und daher $m = 2$, also das Produkt $\varrho\pi = \overset{qp}{{}^{2}B} z^2 + \overset{qp}{{}^{3}B} z^3 + \overset{qp}{{}^{4}B} z^4 + \overset{qp}{{}^{5}B} z^5 + \overset{qp}{{}^{6}B} z^6 + \ldots\ldots$

Es ist aber $\overset{pq}{{}^{2}B} = Aa$, $\overset{qp}{{}^{3}B} = \begin{array}{l} A|b \\ Ba \end{array}$, $\overset{qp}{{}^{4}B} = \begin{array}{l} A|c \\ B\,b \\ C\,a \end{array}$, $\overset{qp}{{}^{5}B} = \begin{array}{l} A|d \\ B\,c \\ C\,b \\ D\,a \end{array}$

folglich auch $\varrho\pi = Aaz^2 + \left.\begin{array}{l} Ab \\ +Ba \end{array}\right\} z^3 + \left.\begin{array}{l} Ac \\ +Bb \\ +Ca \end{array}\right\} z^4 + \left.\begin{array}{l} Ad \\ +Bc \\ +Cb \\ +Da \end{array}\right\} z^5 + \ldots\ldots$

2. Beispiel.

Das Produkt der ersten drei Reihen der Aufgabe zu entwickeln.

* * *

Hier

Hier ist $\mathcal{M}$ C und daher m = 3, also

$$\sigma\varrho\pi = {}^{3}\overset{rqp}{C}z^{3} + {}^{4}\overset{rqp}{C}z^{4} + {}^{5}\overset{rqp}{C}z^{5} + {}^{6}\overset{rqp}{C}z^{6} + {}^{7}\overset{rqp}{C}z^{7} + \ldots$$

Construirt man diese Klassen nach §. 49 so findet man

${}^{3}\overset{rqp}{C}$	${}^{4}\overset{rqp}{C}$	${}^{5}\overset{rqp}{C}$	${}^{6}\overset{rqp}{C}$	${}^{7}\overset{rqp}{C}$	
$\mathfrak{a}$Aa,	$\mathfrak{a}$Ab,	$\mathfrak{a}$Ac,	$\mathfrak{a}$Ad,	$\mathfrak{a}$Ae,	u. s. w.
	$\mathfrak{a}$Ba	$\mathfrak{a}$Bb	$\mathfrak{a}$Bc	$\mathfrak{a}$Bd	
	$\mathfrak{b}$Aa	$\mathfrak{a}$Ca	$\mathfrak{a}$Cb	$\mathfrak{a}$Cc	
		$\mathfrak{b}$Ab	$\mathfrak{a}$Da	$\mathfrak{a}$Db	
		$\mathfrak{b}$Ba	$\mathfrak{b}$Ac	$\mathfrak{a}$Ea	
		$\mathfrak{c}$Aa	$\mathfrak{b}$Bb	$\mathfrak{b}$Ad	
			$\mathfrak{b}$Ca	$\mathfrak{b}$Bc	
			$\mathfrak{c}$Ab	$\mathfrak{b}$Cb	
			$\mathfrak{c}$Ba	$\mathfrak{b}$Da	
			$\mathfrak{d}$Aa	$\mathfrak{c}$Ac	
				$\mathfrak{c}$Bb	
				$\mathfrak{c}$Ca	
				$\mathfrak{d}$Ab	
				$\mathfrak{d}$Ba	
				$\mathfrak{e}$Aa	

folglich $\sigma\varrho\pi =$

$$\mathfrak{a}Aa\,z^{3} + \left(\mathfrak{a}Ab + \mathfrak{a}Ba + \mathfrak{b}Aa\right)z^{4} + \left(\mathfrak{a}Ac + \mathfrak{a}Bb + \mathfrak{a}Ca + \mathfrak{b}Ab + \mathfrak{b}Ba + \mathfrak{c}Aa\right)z^{5} + \left(\mathfrak{a}Ad + \mathfrak{a}Bc + \mathfrak{a}Cb + \mathfrak{a}Da + \mathfrak{b}Ac + \mathfrak{b}Bb + \mathfrak{b}Ca + \mathfrak{c}Ab + \mathfrak{c}Ba + \mathfrak{d}Aa\right)z^{6} + \left(\mathfrak{a}Ae + \mathfrak{a}Bd + \mathfrak{a}Cc + \mathfrak{a}Db + \mathfrak{a}Ea + \mathfrak{b}Ad + \mathfrak{b}Bc + \mathfrak{b}Cb + \mathfrak{b}Da + \mathfrak{c}Ac + \mathfrak{c}Bb + \mathfrak{c}Ca + \mathfrak{d}Ab + \mathfrak{d}Ba + \mathfrak{e}Aa\right)z^{7} + \ldots$$

3. Bei-

3 Beispiel.

Es wird das Produkt der drei begrenzten Reihen gesucht.

$$az + bz^2 + cz^3 = \pi$$
$$Az + Bz^2 + Cz^3 = \varrho$$
$$\mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 = \sigma$$

*　　*　　*

Die höchste Dignität der z welche hier im Produkte vorkommen kann ist gleich z^9 (§. 72, Note *a*)), folglich ist für den Zeiger $\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \\ a & b & c & = p \\ A & B & C & = q \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & = r \end{matrix}\right\}$, das Produkt $\sigma\varrho\pi$

gleich

$${}^{3}\overset{rqp}{C}z^3 + {}^{4}\overset{rqp}{C}z^4 + {}^{5}\overset{rqp}{C}z^5 + {}^{6}\overset{rqq}{C}z^6 + {}^{7}\overset{rqp}{C}z^7 + {}^{8}\overset{rqp}{C}z^8 + {}^{9}\overset{rqp}{C}z^9.$$

Diese Klassen lassen sich bis ${}^{6}C$ nach §. 49. entwickeln, hingegen bei der Entwickelung der übrigen Klassen muss man zu §. 51. seine Zuflucht nehmen, Man mache sich daher nach §. 49. arithm. comb. Aufl. und nach §. 51. für die einzelnen Klassen das Schema.

${}^{3}C$	${}^{4}C$	${}^{5}C$	${}^{6}C$	${}^{7}C$	${}^{8}C$	${}^{9}C$
111	112	113	123	133	233	333
	121	122	132	223	323	
	211	131	213	232	332	
		212	222	313		
		221	231	322		
		311	312	331		
			321			

und substituire in diesem für das erste Element jeder Complexion das ihm zugehörige Element der dritten Reihe des Zeigers, für das zweite setze man ein Element der zweiten

Reihe und für das dritte Element ſchreibe man ein Element der erſten Reihe des Zeigers, ſo erhält man $\sigma\varrho\pi$ gleich

$$\mathfrak{a}Aaz^3 + \mathfrak{a}Ab \left.\begin{matrix} \\ +\mathfrak{a}Ba \\ +\mathfrak{b}Aa \end{matrix}\right\} z^4 + \mathfrak{a}Ac \left.\begin{matrix} \\ +\mathfrak{a}Bb \\ +\mathfrak{a}Ca \\ +\mathfrak{b}Ab \\ +\mathfrak{b}Ba \\ +\mathfrak{c}Aa \end{matrix}\right\} z^5 + \mathfrak{a}Bc \left.\begin{matrix} \\ +\mathfrak{a}Cb \\ +\mathfrak{b}Ac \\ +\mathfrak{b}Bb \\ +\mathfrak{b}Ca \\ +\mathfrak{c}Ab \\ +\mathfrak{c}Ba \end{matrix}\right\} z^6 + \mathfrak{a}Cc \left.\begin{matrix} \\ +\mathfrak{b}Bc \\ +\mathfrak{b}Cb \\ +\mathfrak{c}Ac \\ +\mathfrak{c}Bb \\ +\mathfrak{c}Ca \end{matrix}\right\} z^7 + \mathfrak{b}Cc \left.\begin{matrix} \\ +\mathfrak{c}Bc \\ +\mathfrak{c}Cb \end{matrix}\right\} z^8 + \mathfrak{c}Ccz^9$$

Anmerkung.

Sollten die drei Reihen

$$\begin{matrix} az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 \\ Az + Bz^2 + Cz^3 \\ \mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 + \mathfrak{d}z^4 \end{matrix}$$

unter ſich multiplicirt werden und man legte bei der Entwickelung des Produkts den Zeiger

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ a, & b, & c, & d, & e \\ A, & B, & C, & & \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, & \end{matrix}\right\}$$

zum Grunde, ſo würden in ${}^6\mathcal{C}$, ${}^7\mathcal{C}$ u. ſ. f. alle Complexionen weggelaſsen werden müſsen in welchen D, E und $\mathfrak{e}$ vorkämen, weil dieſe Elemente in dem Zeiger fehlen alſo als Null anzuſehn ſind und daher auch die Produkte zu Null machen in denen ſie ſich befinden. Hieraus wird erhellen, wie zu verfahren iſt, wenn das Produkt mehrerer Reihen, die nicht eine gleiche Anzahl Elemente haben, entwickelt werden ſoll.

Zuſatz.

Es iſt das m + 1te Glied des Produkts der m Reihen der Aufgabe, oder welches das nämliche iſt, es iſt

$$\ldots\tau\sigma\varrho\pi \rceil n + 1 = {}^{m+n}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}} z^{m+n}$$

§. 73.

2. *Aufgabe.*

Es soll das Produkt folgender *m* Reihen angegeben werden.

$$\begin{array}{l} az^{\delta} + bz^{2\delta} + cz^{3\delta} + dz^{4\delta} + \ldots = \pi \\ Az^{\delta} + Bz^{2\delta} + Cz^{3\delta} + Dz^{4\delta} + \ldots = \varrho \\ \mathfrak{a}z^{\delta} + \mathfrak{b}z^{2\delta} + \mathfrak{c}z^{3\delta} + \mathfrak{d}z^{4\delta} + \ldots = \sigma \\ \mathfrak{A}z^{\delta} + \mathfrak{B}z^{2\delta} + \mathfrak{C}z^{3\delta} + \mathfrak{D}z^{4\delta} + \ldots = \tau \\ \;'' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \qquad\qquad '' \end{array}$$

Auflösung.

Bedient man sich hier des Zeigers der Aufgabe des §. 72, so ist das gesuchte Produkt gleich

$$ {}^{m}\overset{\ldots rqp}{\mathfrak{M}}_{z^{m\delta}} + {}^{m+1}\overset{\ldots rqp}{\mathfrak{M}}_{z^{(m+1)\delta}} + {}^{m+2}\overset{\ldots rqp}{\mathfrak{M}}_{z^{(m+2)\delta}} + {}^{m+3}\overset{\ldots rqp}{\mathfrak{M}}_{z^{(m+3)\delta}} + \ldots $$

Beweis.

Die Exponenten der z der gegebenen Reihen der zweiten Aufgabe haben die Benennung δ, hingegen die Exponenten der z der Reihen der ersten Aufgabe sind unbenannte Zahlen und hierdurch allein sind auch nur die gegebenen Reihen der beiden Aufgaben von einander unterschieden. Aus diesem Grunde muſs auch das Produkt der zweiten Aufgabe aus dem Produkte der ersten entstehn, wenn man in diesem den Exponenten der z die Benennung δ giebt. Da nun hierdurch aus dem Produkte der ersten Aufgabe das in der Auflösung der zweiten Aufgabe aufgestellte Produkt wird, so ist einleuchtend, daſs die zweite Aufgabe richtig aufgelöset ist.

Zu-

Zusatz.

Es ist $\ldots\tau\sigma\varrho\pi 7(n+1) = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathcal{M}}z^{m+n\delta}$ und

$$\ldots\tau\sigma\varrho\pi 7(n+1)\,\varkappa = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathcal{M}}.$$

§. 74.

3. *Aufgabe.*

Es wird das Produkt folgender *m* Reihen gesucht

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots = \pi$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots = \varrho$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 + \mathfrak{d}z^3 + \ldots = \sigma$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots = \tau$$
〃 〃 〃 〃 〃

Auflösung.

Nimmt man zur Entwickelung des Produkts wieder den Zeiger der ersten Aufgabe, so ist

$$\ldots\tau\sigma\varrho\pi = {}^{m}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}} + {}^{m+1}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}}z + {}^{m+2}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}}z^2 + {}^{m+3}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}}z^3 + \ldots$$

Beweis.

Man erhält die gegebenen Reihen der dritten Aufgabe, wenn man eine jede Reihe der ersten Aufgabe durch z dividirt, folglich muſs auch aus dem Produkte der ersten Aufgabe daſs durch die dritte Aufgabe verlangte entſtehn, wenn man jenes durch z^m dividirt. Dividirt man aber das Produkt der erſten Aufgabe durch z^m, ſo bekömmt man das in der Auflöſung der dritten Aufgabe aufgeſtellte, folglich iſt dieſes auch das richtige.

1. Zusatz.

Es ist $..\tau\sigma\rho\pi^{7}(n+1) = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{n}$, also

$$\tau\sigma\rho\pi^{7}(n+1)\varkappa = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathcal{M}}.$$

1. Beispiel.

Es soll das dritte Glied der hierunterstehenden fünf Reihen

$$\begin{array}{l} a + bz + cz^{2} + dz^{3} + ez^{4} + \ldots \\ A + Bz + Cz^{2} + Dz^{3} + Ez^{4} + \ldots \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^{2} + \mathfrak{d}z^{3} + \mathfrak{e}z^{4} + \ldots \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^{2} + \mathfrak{D}z^{3} + \mathfrak{E}z^{4} + \ldots \\ \alpha + \beta z + \gamma z^{2} + \delta z^{3} + \varepsilon z^{4} + \ldots \end{array}$$

entwickelt werden.

Hier ist $m = 5$, $\mathcal{M}$ wird $\mathcal{E}$, $n+1$ ist 3 und daher $n = 2$, und folglich das gesuchte Glied gleich ${}^{7}\overset{...rqp}{\mathcal{E}} z^{2}$.

Es ist aber ${}^{7}\overset{...rqp}{\mathcal{E}} = \begin{array}{l} A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\gamma \\ A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\beta \\ A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{c}\,\alpha \\ A\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\beta \\ A\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\ A\,a\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\ A\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\beta \\ A\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\ A\,b\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\ A\,c\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\ B\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\beta \\ B\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\ B\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\ B\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\ C\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha \end{array}$ also ${}^{7}\overset{...rqp}{\mathcal{E}} z^{2} = \left.\begin{array}{l} A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\gamma \\ +A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\beta \\ +A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{c}\,\alpha \\ +A\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\beta \\ +A\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\ +A\,a\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\ +A\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\beta \\ +A\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\ +A\,b\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\ +A\,c\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\ +B\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\beta \\ +B\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\ +B\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\ +B\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\ +C\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha \end{array}\right| z^{2}.$

2. Bei-

2. *Beispiel.*

Es wird das 8te Glied des Produkts der fünf Reihen gesucht.

$$a + bz + cz^2 = \pi$$
$$A + Bz + Cz^2 = \varrho$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 = \sigma$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 = \tau$$
$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 = \varphi$$

Das verlangte Produkt ist gleich $^{12}\overset{tsrqp}{E} z^7$. Entwickelt man die Klasse ^{12}E nach §. 51 in Zahlen so erhält man das Schema ♀, und daher giebt die Figur ♁ das Produkt

♀	♁	
12333	$+ \alpha \mathfrak{B} \mathfrak{c} C c$	
13233	$+ \alpha \mathfrak{C} \mathfrak{b} C c$	
13323	$+ \alpha \mathfrak{C} \mathfrak{c} B c$	
13332	$+ \alpha \mathfrak{C} \mathfrak{c} C b$	
22233	$+ \beta \mathfrak{B} \mathfrak{b} C c$	
22323	$+ \beta \mathfrak{B} \mathfrak{c} B c$	
22332	$+ \beta \mathfrak{B} \mathfrak{c} C b$	
23223	$+ \beta \mathfrak{C} \mathfrak{b} B c$	
23232	$+ \beta \mathfrak{C} \mathfrak{b} C b$	
23313	$+ \beta \mathfrak{C} \mathfrak{c} A c$	
23322	$+ \beta \mathfrak{C} \mathfrak{c} B b$	
23331	$+ \beta \mathfrak{C} \mathfrak{c} C a$	
31233	$+ \gamma \mathfrak{A} \mathfrak{b} C c$	
31323	$+ \gamma \mathfrak{A} \mathfrak{c} B c$	z^7
31332	$+ \gamma \mathfrak{A} \mathfrak{c} C b$	
32133	$+ \gamma \mathfrak{B} \mathfrak{a} C c$	
32223	$+ \gamma \mathfrak{B} \mathfrak{b} B c$	
32232	$+ \gamma \mathfrak{B} \mathfrak{b} C b$	
32313	$+ \gamma \mathfrak{B} \mathfrak{c} A c$	
32322	$+ \gamma \mathfrak{B} \mathfrak{c} B b$	
32331	$+ \gamma \mathfrak{B} \mathfrak{c} C a$	
33123	$+ \gamma \mathfrak{C} \mathfrak{a} B c$	
33132	$+ \gamma \mathfrak{C} \mathfrak{a} C b$	
33213	$+ \gamma \mathfrak{C} \mathfrak{b} A c$	
33222	$+ \gamma \mathfrak{C} \mathfrak{b} B b$	
33231	$+ \gamma \mathfrak{C} \mathfrak{b} C a$	
33312	$+ \gamma \mathfrak{C} \mathfrak{c} A b$	
33321	$+ \gamma \mathfrak{C} \mathfrak{c} B a$	

§. 75.

§ 75.

4. Aufgabe.

Das Produkt folgender m Reihen darzustellen

$$a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \ldots = \pi$$
$$A + Bz^{\delta} + Cz^{2\delta} + Dz^{3\delta} + \ldots = \varrho$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z^{\delta} + \mathfrak{c}z^{2\delta} + \mathfrak{d}z^{3\delta} + \ldots = \sigma$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z^{\delta} + \mathfrak{C}z^{2\delta} + \mathfrak{D}z^{3\delta} + \ldots = \tau$$
$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

Auflösung.

In Rücksicht auf den Zeiger der Aufgabe des §. 72

ist $\ldots\tau\sigma\varrho\pi = {}^{m}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} + {}^{m+1}\overset{...rqp}{\mathcal{M}}z^{\delta} + {}^{m+2}\overset{..rqp}{\mathcal{M}}z^{2\delta} + {}^{m+3}\overset{...rqp}{\mathcal{M}}z^{3\delta} + \ldots$

Beweis.

Eben so wie die Richtigkeit der Auflösung der zweiten Aufgabe durch eine Vergleichung dieser zweiten mit der ersten Aufgabe dargethan ist, läſst sich hier wieder die Richtigkeit der Auflösung der vierten Aufgabe durch eine Vergleichung dieser vierten mit der dritten darthun.

Es ist $\ldots\tau\sigma\varrho\pi 7(n+1) = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathcal{M}}z^{n\delta}$ und daher

$..\tau\sigma\varrho\pi\, 7(n+1)\varkappa = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathcal{M}}.$

§. 76.

5. *Aufgabe.*

Das Produkt folgender m Reihen zu bestimmen.

$$az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots = v$$
$$Az^{\nu} + Bz^{\nu+\delta} + Cz^{\nu+2\delta} + Dz^{\nu+3\delta} + \ldots = w$$
$$\mathfrak{a}z^{\pi} + \mathfrak{b}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{c}z^{\pi+2\delta} + \mathfrak{d}z^{\pi+3\delta} + \ldots = x$$
$$\mathfrak{A}z^{\varrho} + \mathfrak{B}z^{\varrho+\delta} + \mathfrak{C}z^{\varrho+2\delta} + \mathfrak{D}z^{\varrho+3\delta} + \ldots = y$$
$$'' \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''$$

Auflösung.

Man lege hier wieder den Zeiger der ersten Aufgabe zum Grunde und setze die Summe der Exponenten $\mu + \nu + \pi + \varrho + \ldots = \Sigma$, so ist

$$\ldots yxwv = {}^{m}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}z^{\Sigma} + {}^{m+1}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}z^{\Sigma+\delta} + {}^{m+2}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}z^{\Sigma+2\delta} + {}^{m+3}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}z^{\Sigma+3\delta} + \ldots$$

Beweis.

Es ist

$$az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + \ldots = (a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)z^{\mu}$$
$$Az^{\nu} + Bz^{\nu+\delta} + Cz^{\nu+2\delta} + \ldots = (A + Bz^{\delta} + Cz^{2\delta} + \ldots)z^{\nu}$$
$$\mathfrak{a}z^{\pi} + \mathfrak{b}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{c}z^{\pi+2\delta} + \ldots = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z^{\delta} + \mathfrak{c}z^{2\delta} + \ldots)z^{\pi}$$
$$\mathfrak{A}z^{\varrho} + \mathfrak{B}z^{\varrho+\delta} + \mathfrak{C}z^{\varrho+2\delta} + \ldots = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z^{\delta} + \mathfrak{C}z^{2\delta} + \ldots)z^{\varrho}$$
$$'' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''$$

Bezeichnet man also die erste eingeklammerte Reihe mit S1, die zweite mit S2, die dritte mit S3 u. s. f. so wird

 ..zxwv

$$\ldots yxwv = (Sm \ldots\ldots S3.\ S2.\ S1.)\ z^{\mu+\nu+\pi+\rho+\ldots}$$
$$= (Sm \ldots\ldots S3.\ S2.\ S1.)\ z^{\Sigma}$$

Es ist aber $(Sm \ldots\ldots S3.\ S2.\ S1.) = {}^{m}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} + {}^{m+1}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{\delta} + {}^{m+2}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{2\delta} + \ldots$ (§. 75), folglich auch

$$\ldots yxwv = {}^{m}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{\Sigma} + {}^{m+1}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{\Sigma+\delta} + {}^{m+2}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{\Sigma+2\delta} + {}^{m+3}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{\Sigma+3\delta} + \ldots$$

Zusatz.

Es ist $..yxwv\urcorner(n+1) = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{\Sigma+n\delta}$, also

$$.yxwv\urcorner(n+1)\varkappa = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathcal{M}}.$$

1. *Beispiel.*

Es wird das dritte Glied des Produkts der hierunterstehenden Reihen gesucht.

$$az^2 + bz^4 + cz^6 + dz^7 + \ldots$$
$$Az^3 + Bz^5 + Cz^6 + Dz^8 + \ldots$$
$$\mathfrak{a}z^8 + \mathfrak{b}z^{10} + \mathfrak{c}z^{12} + \mathfrak{d}z^{14} + \ldots$$
$$\mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^3 + \mathfrak{C}z^5 + \mathfrak{D}z^7 + \ldots$$

* * *

Da hier $\mathcal{M} = \mathcal{D}$, $m=4$, $n=2$, $\delta=2$; ferner $\mu=2$, $\nu=3$, $\pi=8$, $\rho=1$ also $\Sigma = 14$ ist, so ist das gesuchte Glied gleich ${}^{6}\overset{..rqp}{\mathcal{D}} z^{18}$.

Es

Es ist aber $\overset{..rqp}{{}^{6}D} = A|a\,\mathfrak{A}|c$, folglich $\overset{..rqp}{{}^{6}D}z^{18} = A\,a\,\mathfrak{A}\,c|z^{18}$

$$\begin{array}{ll} A|a|\mathfrak{B}\,b & +A\,a\,\mathfrak{B}\,b \\ A|a|\mathfrak{C}\,a & +A\,a\,\mathfrak{C}\,a \\ A|b\,\mathfrak{A}\,b & +A\,b\,\mathfrak{A}\,b \\ A|b\,\mathfrak{B}\,a & +A\,b\,\mathfrak{B}\,a \\ A|c\,\mathfrak{A}\,a & +A\,c\,\mathfrak{A}\,a \\ B\,a\,\mathfrak{A}\,b & +B\,a\,\mathfrak{A}\,b \\ B\,a\,\mathfrak{B}\,a & +B\,a\,\mathfrak{B}\,a \\ B\,b\,\mathfrak{A}\,a & +B\,b\,\mathfrak{A}\,a \\ C\,a\,\mathfrak{A}\,a & +C\,a\,\mathfrak{A}\,a \end{array}$$

§. 77.

5. *Aufgabe.*

Das Produkt folgender m Reihen zu bestimmen

$$\begin{array}{l} az^a + bz^b + cz^c + dz^d + \ldots = \pi \\ Az^A + Bz^B + Cz^C + Dz^D + \ldots = \varrho \\ \mathfrak{a}z^\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z^\mathfrak{b} + \mathfrak{c}z^\mathfrak{c} + \mathfrak{d}z^\mathfrak{d} + \ldots = \sigma \\ '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \end{array}$$

Auflösung.

Für den Zeiger $\left\{\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ a & b & c & d \ldots = p \\ A & B & C & D \ldots = q \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \ldots = r \\ '' & '' & '' & '' \quad '' \end{array}\right\}$

ist die allgemeine Form des Produkts diese:

$$\overset{..rqp}{{}^{m}\mathcal{M}}z^* + \overset{..rqp}{{}^{m+1}\mathcal{M}}z^* + \overset{..rqp}{{}^{m+2}\mathcal{M}}z^* + \overset{..rqp}{{}^{m+3}\mathcal{M}}z^* + \ldots$$

Beweis.

Dass das angegebene Produkt in Rücksicht auf seine Coefficienten richtig sey, folgt schon aus einer Vergleichung

chung der jetzigen Aufgabe mit den vorhergehenden; dass aber die Exponenten hier im allgemeinen mit * bezeichnet werden dürfen folgt aus §. 70 (s. Bezeichn. der Exp.) sobald man die Wahrheit vor Augen hat, dass ein jeder Coefficient $\overset{..rqp}{{}^{m}\mathfrak{M}}$, $\overset{..rqp}{{}^{m+1}\mathfrak{M}}$, $\overset{..rqp}{{}^{m+2}\mathfrak{M}}$ u. s. f. eine Summe von Produkten ist, deren Factoren die Coefficienten der gegebenen Reihen sind.

1. *Beispiel.*

Es soll das Produkt der ersten drei Reihen der Aufgabe entwickelt werden.

$$\overset{*\quad *\quad *}{}$$

Hier ist $\sigma\rho\pi = \overset{rqp}{{}^{3}C} z^{*} + \overset{rqp}{{}^{4}C} z^{*} + \overset{rqp}{{}^{5}C} z^{*} + \overset{rqp}{{}^{6}C} z^{*} + \overset{rqp}{{}^{7}C} z^{*} + \ldots$

Es ist aber $\overset{rqp}{{}^{3}C} = \mathfrak{a} A a$, $\overset{rqp}{{}^{4}C} = \begin{array}{l|l} \mathfrak{a} & A\,b \\ \mathfrak{a} & B\,a \\ \hline \mathfrak{b} & A\,a \end{array}$, $\overset{rqp}{{}^{5}C} = \begin{array}{l|l} \mathfrak{a} & A\,c \\ \mathfrak{a} & B\,b \\ \mathfrak{a} & C\,a \\ \hline \mathfrak{b} & A\,b \\ \mathfrak{b} & B\,a \\ & A\,a \end{array}$

$\overset{rqp}{{}^{6}C} = \begin{array}{l|l} \mathfrak{a} & A\,d \\ \mathfrak{a} & B\,c \\ \mathfrak{a} & C\,b \\ \mathfrak{a} & D\,a \\ \hline \mathfrak{b} & A\,c \\ \mathfrak{b} & B\,b \\ \mathfrak{b} & C\,a \\ \mathfrak{c} & A\,b \\ \mathfrak{c} & B\,a \\ \mathfrak{d} & A\,a \end{array}$, u. s. w.

folglich

folglich ist auch

$$\begin{aligned}\sigma\varrho\pi = \mathfrak{a}Aaz^{\mathfrak{a}+A+a} & + \mathfrak{a}Abz^{\mathfrak{a}+A+b} + \mathfrak{a}Acz^{\mathfrak{a}+A+c} \\ & + \mathfrak{a}Baz^{\mathfrak{a}+B+a} + \mathfrak{a}Bbz^{\mathfrak{a}+B+b} \\ & + \mathfrak{b}Aaz^{\mathfrak{b}+A+a} + \mathfrak{a}Caz^{\mathfrak{a}+C+a} \\ & + \mathfrak{b}Abz^{\mathfrak{b}+A+b} \\ & + \mathfrak{b}Baz^{\mathfrak{b}+B+a} \\ & + \mathfrak{c}Aaz^{\mathfrak{c}+A+a} \\ & + \mathfrak{a}Adz^{\mathfrak{a}+A+d} \\ & + \mathfrak{a}Bcz^{\mathfrak{a}+B+c} \\ & + \mathfrak{a}Cbz^{\mathfrak{a}+C+b} \\ & + \mathfrak{a}Daz^{\mathfrak{a}+D+a} \\ & + \mathfrak{b}Acz^{\mathfrak{b}+A+c} \\ & + \mathfrak{b}Bbz^{\mathfrak{b}+B+b} \\ & + \mathfrak{b}Caz^{\mathfrak{b}+C+a} \\ & + \mathfrak{c}Abz^{\mathfrak{c}+A+b} \\ & + \mathfrak{c}Baz^{\mathfrak{c}+B+a} \\ & + \mathfrak{d}Aaz^{\mathfrak{d}+A+a}\end{aligned}$$

§. 78.

6. *Aufgabe.*

Es soll das Produkt der hierunter befindlichen m Reihen angegeben werden.

$$\begin{array}{llllll} av & + bw & + cx & + \ldots\ldots & = \pi \\ Av & + Bw & + Cx & + \ldots\ldots & = \varrho \\ \mathfrak{a}v & + \mathfrak{b}w & + \mathfrak{c}x & + \ldots\ldots & = \sigma \\ \mathfrak{A}v & + \mathfrak{B}w & + \mathfrak{C}x & + \ldots\ldots & = \tau \\ '' & '' & '' & & '' \end{array}$$

Auflösung.

Man suche das Produkt der Reihen, welche die Coefficienten für sich bilden, so erhält man die Coefficienten

enten des geſuchten Produkts. Ieden dieſer Coefficienten multiplicire man mit den veränderlichen Gröſsen wovon ſeine Factoren Coefficienten ſind, ſo hat man das verlangte Produkt der gegebenen Reihen.

Beweis.

Die Coefficienten der gegebenen Reihen machen, mit ihren veränderlichen Gröſsen multiplicirt, die Glieder jener Reihen aus, folglich entſteht auch das Produkt der Glieder, oder welches einerlei iſt, das Produkt der gegebenen Reihen, wenn man in dem Produkte der Reihen, welche die Coefficienten für ſich ausmachen, jeden einzelnen Theil mit den veränderlichen Gröſsen multiplicirt, von welchen die Factoren des einzelnen Theils die Coefficienten ſind.

Beiſpiel.

Die Coefficienten des Produkts der beiden erſten Reihen π und ϱ ſind für den Zeiger

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots \\ a,\ b,\ c,\ d\ldots = p \\ A,\ B,\ C,\ D\ldots = q \end{array}\right\}$$

folgende: $^2\overset{qp}{B},\ ^3\overset{qp}{B},\ ^4\overset{qp}{B},\ ^5\overset{qp}{B},\ ^6\overset{qp}{B},\ ^7\overset{qp}{B},$ u. ſ. f.

Da nun $^2\overset{qp}{B} = Aa$, $^3\overset{qp}{B} = \begin{array}{l} A|b \\ Ba \end{array}$, $^4\overset{qp}{B} = \begin{array}{l} A|c \\ Bb \\ Ca \end{array}$, $^5\overset{qp}{B} = \begin{array}{l} A|d \\ Bc \\ Cb \\ Da \end{array}$

ſo iſt auch $\pi\varrho = Aav^2 + \left.\begin{array}{l} Ab \\ +Ba \end{array}\right\} wv + \begin{array}{l} Acxv \\ +Bbw^2 \\ +Caxv \end{array} + \begin{array}{l} Adyv \\ +Bczw \\ +Cbxw \\ +Dayv \end{array} + \ldots$

III. Com-

III. Combinatorische Entwickelung der Dignitäten.

§. 79.

1. *Aufgabe.*

Es soll $(a+b)^m$ entwickelt werden, aber unter der Voraussetzung, dass m eine ganze positive Zahl ist.

Auflösung.

Man suche für den Zeiger $\binom{1,\ 2}{a,\ b}$ die mte Klasse der Variationen mit Wiederholungen, so hat man das Verlangte, oder es ist

$$(a+b)^m = \underset{\binom{1,\ 2}{a,\ b}}{{}'\mathcal{M}} = m\underset{\binom{1,\ 2}{a,\ b}}{{}'\mathfrak{M}}$$

Beweis.

Wenn m eine ganze positive Zahl ist, so ist $(a+b)^m$ ein Produkt von m Factoren, deren ein jeder gleich $a+b$ ist. Die Multiplication solcher m Ausdrücke stimmt aber mit dem Variiren m gleicher Reihen überein (§. 71) und giebt daher eine mte Variationsklasse. Diese mte Variationsklasse ist aber nichts anders als die mte Klasse der Variationen mit Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1,\ 2}{a,\ b}$, folglich gleich $\underset{\binom{1,\ 2}{a,\ b}}{{}'\mathcal{M}} = m\underset{\binom{1,\ 2}{a,\ b}}{{}'\mathfrak{M}}$. (§. 66).

1. *Zusatz.*

Nach dem zweiten Zusatze zur dritten Auflösung der Aufgabe des §. 24. ist

$${}'\mathfrak{J}{}'\mathfrak{M}$$

$${}^{\prime}J^{\prime}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2.\,3\,..}{a,\,b.\,c\,..}} \text{ oder schlechtweg } {}^{\prime}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}} = a^m + a^{m-1}\,{}^{\prime}A + a^{m-2}\,{}^{\prime}B + \,..$$

$$+ a^0\,{}^{\prime}\mathfrak{M}_{\binom{2,\,3,\,4\,...}{b,\,c,\,d\,...}}.$$

Wendet man dieses auf ${}^{\prime}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2}{a,\,b}}$ an, so erhält man

$${}^{\prime}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2}{a,\,b}} = a^m + a^{m-1}\,{}^{\prime}A + a^{m-2}\,{}^{\prime}B + a^{m-3}\,{}^{\prime}C + \ldots + a^0\,{}^{\prime}\mathfrak{M}_{\binom{2}{b}}$$

oder auch

$${}^{\prime}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2}{a,\,b}} = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots\ldots + b^m.$$

Aus ${}^{\prime}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2}{a,\,b}}$ erhält man $m\,{}^{\prime}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2}{a,\,b}}$, wenn man in dem Werthe für ${}^{\prime}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2}{a,\,b}}$ jedes Glied mit der ihm zugehörigen Versetzungszahl (§. 20) multiplicirt, folglich ist $m\,\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2}{a,\,b}}$ und daher auch

$$(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2} a^{m-2} b^2 + \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3} a^{m-3} b^3 + \ldots + b^m.$$

2. Zu

2. Zusatz.

1) Es lassen sich unter der Bedingung, dass m und n ganze positive Zahlen sind $\left((a+b)^m\right)^{\frac{1}{n}}$ und $\left((a+b)^n\right)^{\frac{1}{m}}$ so entwickeln, dass man zwei Ausdrücke von einerlei Form erhält, d. h. die beiden Ausdrücke werden von der Beschaffenheit seyn, dass der eine so durch a, b, m und $\frac{1}{n}$ bestimmt wird, wie der andere durch a, b, und $\frac{1}{m}$; denn $(a+b)^m$ und $(a+b)^n$ haben, entwickelt, gewiss einerlei Form und folglich auch $\left((a+b)^m\right)^{\frac{1}{n}}$ und $\left((a+b)^n\right)^{\frac{1}{m}}$ weil sich die Exponenten $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ bloss durch die Grösse der Nenner unterscheiden.

2) Es ist aber $\left((a+b)^m\right)^{\frac{1}{n}} = (a+b)^{\frac{m}{n}}$ und $\left((a+b)^n\right)^{\frac{1}{m}} = (a+b)^{\frac{n}{m}}$, daher ist einleuchtend, dass auch $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ und $(a+b)^{\frac{n}{m}}$, wenn sie entwickelt werden, Formeln von einerlei Form geben werden. Ist aber dieses der Fall, so kann auch die Form der Formel für $\left((a+b)^{\frac{m}{n}}\right)^n$ nicht von der Form der Formel für $\left((a+b)^{\frac{n}{m}}\right)^n$ unterschieden seyn und folglich gilt dasselbe auch für $(a+b)^m$ und für $(a+b)^{\frac{n^2}{m}}$, weil $\left((a+b)^{\frac{m}{n}}\right)^n = (a+b)^m$ und $\left((a+b)^{\frac{n}{m}}\right)^n = (a+b)^{\frac{n^2}{m}}$ ist.

3) Da

3) Da nun in $(a+b)^{\frac{n^2}{m}}$, n und m in jedem Verhältnisse gedacht werden können, so mag $n^2 = p$ aber kleiner oder grösser als m und daher $\frac{n^2}{m}$ oder $\frac{p}{m}$ eine eigentliche oder uneigentliche gebrochne Zahl seyn. Es haben also die Formeln für $(a+b)^m$ und $(a+b)^{\frac{p}{m}}$ einerlei Form, oder eben so wie die Formel für $(a+b)^m$ durch a, b und m bestimmt wird, wird auch die Formel für $(a+b)^{\frac{p}{m}}$ durch a, b und $\frac{p}{m}$ bestimmt, es mag $\frac{p}{m}$ eine eigentliche oder uneigentliche gebrochne Zahl seyn. Es ist also wenn unter $\frac{p}{m}$ irgend eine positive gebrochne Zahl gedacht wird,

$$(a+b)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} + \frac{p}{m} a^{\frac{p}{m}-1} b + \frac{\frac{p}{m} \cdot \left(\frac{p}{m}-1\right)}{1 \cdot 2} a^{\frac{p}{m}-2} b^2 + \ldots$$

3. *Zusatz.*

1) Wenn man sich unter m wieder eine ganze positive Zahl denkt, so wird die Formel für $\frac{1}{(a+b)^{2m+1}}$ so durch a, b und $2m+1$ ausgedrückt, wie die Formel für $\frac{1}{(a+b)^m}$ durch a, b und m ausgedrückt wird. Denn diese beiden Formeln müssen einerlei Form haben, weil sich $\frac{1}{(a+b)^{2m+1}}$ und $\frac{1}{(a+b)^m}$ blofs durch die Exponen-

ten

ten $2m+1$ und m von einander unterscheiden und diese doch nur durch die Grösse von einander unterschieden sind.

2) Kommen aber die Formeln für $\frac{1}{(a+b)^{2m+1}}$ und $\frac{1}{(a+b)^{m}}$ in ihrer Form mit einander überein, so müssen auch die Formeln für $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{2m+1}}$ und $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{m}}$ einerlei Form haben und aus diesem Grunde auch die für $(a+b)^{-1}$ und $(a+b)^{m}$, weil $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{2m+1}} = (a+b)^{-1}$ und $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{m}} = (a+b)^{m}$ ist.

3) Hat aber die Formel für $(a+b)^{-1}$ mit der für $(a+b)^{m}$ einerlei Form, so gilt dieses auch für $((a+b)^{-1})^{p}$ und $((a+b)^{m})^{p}$ und deswegen wieder für $((a+b)^{-p})^{\frac{1}{q}}$ und $((a+b)^{mp})^{\frac{1}{q}}$. Es ist aber $((a+b)^{-p})^{\frac{1}{q}} = (a+b)^{-\frac{p}{q}}$ und $((a+b)^{mp})^{\frac{1}{q}} = (a+b)^{\frac{mp}{q}}$, folglich haben auch die Formeln für $(a+b)^{-\frac{p}{q}}$ und $(a+b)^{\frac{mp}{q}}$ einerlei Form, es mag p mit q in einem Verhältnisse stehn in welchem man will.

4) Da nun den Formeln für $(a+b)^{\frac{mp}{q}}$ und $(a+b)^{m}$ einerlei Form zukömmt, weil dieses schon von selbst klar

ist, wenn $\frac{mp}{q}$ eine ganze Zahl ist und durch den zweiten Zusatz dargethan wird, wenn $\frac{mp}{q}$ eine gebrochene Zahl ist, so ist einleuchtend, dass auch die Formel für $(a+b)^{-\frac{p}{q}}$ so durch a, b und $-\frac{p}{q}$ bestimmt wird, wie die Formel für $(a+b)^m$ durch a, b und m bestimmt ist und zwar es mag $\frac{p}{q}$ eine ganze oder gebrochne Zahl seyn.

Setzt man hier also $-\frac{p}{q} = -n$, so dass also unter n eine jede positive ganze und gebrochne Zahl gedacht werden darf, so ist

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} + \frac{-n}{1} a^{-n-1} + \frac{-n.(-n-1)}{1.2} a^{-n-2} + ..$$
u. s. w.

4. *Zusatz.*

Jede Dignität des Binomiums hat die Form welche für $(a+b)^m$ im ersten Zusatze bestimmt ist, es mag der Exponent eine positive oder negative eine ganze oder gebrochene Zahl seyn, oder es bleibt für einen jeden Werth, den man dem *m* giebt

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} + \text{ u. s. w. } a).$$

Willkührlicher Satz.

Die Binomialcoefficienten bezeichnet man mit grossen deutschen Buchstaben, denen man oben zur Linken den Expo-

a) Hingegen die Form, welche in der Auflösung der ersten Aufgabe angegeben wurde, findet nur statt, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl ist.

Exponenten der Dignität anhängt, so dass ${}^{m}\mathfrak{A}$ den zweiten, ${}^{m}\mathfrak{B}$ den dritten, ${}^{m}\mathfrak{C}$ den vierten, ${}^{m}\mathfrak{D}$ den fünften Binomialcoefficienten der mten Dignität anzeigt u. s. f.

Hiernach ist also

$$(a+b)^{m} = a^{m} + {}^{m}\mathfrak{A}a^{m-1}b + {}^{m}\mathfrak{B}a^{m-2}b^{2} + {}^{m}\mathfrak{C}a^{m-3}b^{3} + ..$$

$$(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{A}a^{\frac{p}{q}-1}b + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}a^{\frac{p}{q}-2}b^{2} + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{C}a^{\frac{p}{q}-3}b^{3} + \ldots$$

$$(a+b)^{-r} = a^{-r} + {}^{-r}\mathfrak{A}a^{-r-1}b + {}^{-r}\mathfrak{B}a^{-r-2}b^{2} + {}^{-r}\mathfrak{C}a^{-r-3}b^{3} + \ldots$$

Der nte Binomialcoefficient wird durch $\mathfrak{N}$ angedeutet so dass also

$${}^{m}\mathfrak{N} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \ldots (m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots n-1} \text{ ist. } a).$$

5. *Zusatz.*

Es ist

$$(a+bz)^{m} = a^{m} + {}^{m}\mathfrak{A}a^{m-1}bz + {}^{m}\mathfrak{B}a^{m-2}b^{2}z^{2} + {}^{m}\mathfrak{C}a^{m-3}b^{3}z^{3} +$$

weil man diesen Ausdruck erhält, wenn man in

$$(a+b)^{m} = a^{m} + {}^{m}\mathfrak{A}a^{m-1}b + {}^{m}\mathfrak{B}a^{m-2}b^{2} + {}^{m}\mathfrak{C}a^{m-3}b^{3} + \ldots;$$

bz statt b setzt.

6. *Zusatz.*

Es ist $(az+bz^{2})^{m} = ((a+bz)z)^{m} = (a+bz)^{m}z^{m}$, also auch

$$(az + bz^{2})^{m} = (a^{m} + {}^{m}\mathfrak{A}a^{m-1}bz + {}^{m}\mathfrak{B}a^{m-2}b^{2}z^{2} + {}^{m}\mathfrak{C}a^{m-3}b^{3}z^{3} + \ldots)z^{m}$$

$$= a^{m}z^{m} + {}^{m}\mathfrak{A}a^{m-1}bz^{m+1} + {}^{m}\mathfrak{B}a^{m-2}b^{2}z^{m+2} + {}^{m}\mathfrak{C}a^{m-3}b^{3}z^{m+3} + \ldots$$

a) Man nimmt aber gewöhnlich zur Bezeichnung unbestimmter Binomialcoefficienten, Buchstaben eines Alphabets, welches von dem unterschieden ist, aus welchem man die bestimmten genommen hat.

§. 80.

2. *Aufgabe.*

Es ſoll die mte Dignität der Reihe $a+b+c+d+e+ . = p$ entwickelt werden, unter der Vorausſetzung, daſs m eine ganze poſitive Zahl iſt.

Auflöſung.

Man erhält das Geſuchte wenn man $\mathfrak{M}\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}$ oder ${}_{m}{}'\mathfrak{M}\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}$ entwickelt.

Beweis.

Die Richtigkeit der gegebenen Auflöſung ſtützt ſich auf die nämlichen Gründe, auf welchen die Richtigkeit der Auflöſung der erſten Aufgabe beruhet.

Zuſatz.

Da $${}_{m}{}'\mathfrak{M}\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..} = {}_{m}^{\;m}\mathfrak{M} + {}_{m}^{\;m+1}\mathfrak{M} + {}_{m}^{\;m+2}\mathfrak{M} + {}_{m}^{\;m+3}\mathfrak{M} + \dots \binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}$$

ſo iſt auch

$$(a+b+c+d+..)^{m} = {}_{m}^{\;m}\mathfrak{M} + {}_{m}^{\;m+1}\mathfrak{M} + {}_{m}^{\;m+2}\mathfrak{M} + {}_{m}^{\;m+3}\mathfrak{M} + \dots \binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}$$

Beiſpiel.

Es wird die dritte Dignität der $a+b+c+d+e+,..$ geſucht.

*

* *

Es

Es ist $(a+b+c+d+e+..)^3 = {}_c{}^3C + {}_c{}^4C + {}_c{}^5C + {}_c{}^6C + {}_c{}^7C + \dots$

$$\binom{1,\,2,\,3,\,4\,..}{a,\,b,\,c,\,d\,..}$$

Da nun nach §. 30.

^3C	^4C	^5C	^6C	^7C	
aaa,	aab,	aac,	aad,	aae,	u. s. w.
		abb	abc	abd	
			bbb	acc	
				bbc	

so ist auch

$$(a+b+c+d+e+..)^m = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3a^2e + \dots + 3ab^2 + 6abc + 6abd + b^3 + 3ac^2 + 3b^2c$$

§. 81.

3. *Aufgabe.*

Es wird für $(a+b+c+d+\cdots)^m$ eine Formel verlangt, welche paßt, es mag m eine Zahl seyn, was für eine man will.

Auflösung.

Es ist

$$(a+b+c+d+..)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_a{}'A + {}^m\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,{}_b{}'B + {}^m\mathfrak{C}\,a^{m-3}\,{}_c{}'C + ..$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\,..}{b,\ c,\ d,\ e\,..}$$

Beweis.

Es sey $(b+c+d+e+\ldots) = S$, also $a+b+c+d+e+\ldots = a+S$ und daher $(a+b+c+d+e+\ldots)^m = (a+S)^m$.

Soll nun hier m jede Zahl seyn können, so ist die Formel für $(a+S)^m$ diese:

$$(a+S)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}S + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}S^2 + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}S^3 + \ldots$$

Es ist aber nach §. 79, 1 Aufg. Aufl.

$$S = {}_a{}'A,\ S^2 = {}_b{}'B,\ S^3 = {}_c{}'C,\ S^4 = {}_d{}'D, \text{ u. s. w.}$$
$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d,\ e\ldots}$$

folglich ist auch

$$(a+S)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}\,{}_a{}'A + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}\,{}_b{}'B + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}\,{}_c{}'C + \ldots$$
$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d,\ e\ldots}$$

Zusatz.

Es ist $(a+b+c+d+\ldots)^m\, 7\,(n+1) = {}^m\mathfrak{N}_a{}^{m-n}\,{}_n{}'\mathfrak{N}.$
$$\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}$$

1. *Beispiel.*

Es soll $a+b+c+d)^{\frac{2}{3}}$ entwickelt werden.

* * *

$$\text{Es ist } (a+b+c+d)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_a{}^{\frac{2}{3}-1}\,{}_a{}'A + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}_a{}^{\frac{2}{3}-2}\,{}_b{}'B + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}_a{}^{\frac{2}{3}-3}\,{}_c{}'C + \ldots$$
$$\binom{1,\ 2,\ 3}{b,\ c,\ d}$$

Con-

Construirt man hier die Klassen $'A, 'B, 'C,$ nach §. 24, a) Rein combinatorische Aufl. so erhält man diese Figur:

b	c	d	'A
bb	bc	bd	
	cc	cd	'B
		dd	
bbb	bbc	bbd	
	bcc	bcd	'C
		bdd	
	ccc	ccd	
		cdd	
		ddd	

folglich ist, wenn man jede Complexion mit ihrer Versetzungszahl multiplicirt,

$$(a+b+c+d)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\, a^{\frac{2}{3}-1}(b+c+d) + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\, a^{\frac{2}{3}-2}\left(\begin{matrix} b^2+2bc+2bd \\ +c^2+2cd \\ +d^2 \end{matrix}\right) + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\, a^{\frac{2}{3}-3}\left(\begin{matrix} b^3+3b^2c+3b^2d \\ +3bc^2+6bcd \\ +3bd^2 \\ +c^3+3c^2d \\ +3cd^2 \\ +d^3 \end{matrix}\right) + \ldots$$

$$= a^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}a^{\frac{2}{3}-1}(b+c+d) + \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-1}{1\cdot 2}\, a^{\frac{2}{3}-2}\left(\begin{matrix} b^2+2bc+2bd \\ +c^2+2cd \\ +d^2 \end{matrix}\right)$$

$$+ \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-1\cdot\frac{2}{3}-2}{1\cdot 2\cdot 3}\, a^{\frac{2}{3}-3}\left(\begin{matrix} b^3+3b^2c+3b^2d \\ +3bc^2+6bcd \\ +3bd^2 \\ +c^3+3c^2d \\ +3cd^2 \\ +d^3 \end{matrix}\right) + \ldots$$

2. Beispiel.

Es wird die Entwickelung des $(a+b+c+d)^{-7}\,{}'5$ verlangt.

Dem Zusatze gemäſs iſt

$$(a+b+c+d)^{-7}\,{}'5 = {}^{-7}\mathfrak{D}\,a^{-11}\,{}^{b}\,{}'D$$

$$= \frac{-7 \cdot -8 \cdot -9 \cdot -10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\,a^{-11}\,{}^{b}\,{}'D = -210\,a^{-11}\,{}^{b}\,{}'D \binom{1,\ 2,\ 3}{b,\ c,\ d}$$

Es iſt aber nach der zweiten rein combinatoriſchen Auflöſung der Aufgabe des §. 24, $'D \binom{1,\ 2,\ 3}{b,\ c,\ d} = ♀$, folglich iſt

auch $-210\,a^{-11}\,{}^{b}\,{}'D \binom{1,\ 2,\ 3}{b,\ c,\ d} = ♁$

♀			
b	b	b	b
b	b	b	c
b	b	b	d
b	b	c	c
b	b	c	d
b	b	d	d
b	c	c	c
b	c	c	d
b	c	d	d
b	d	d	d
c	c	c	c
c	c	c	d
c	c	d	d
c	d	d	d
d	d	d	d

$$♁ = -210\,a^{-11} \left\{ \begin{array}{l} b^4 \\ + 4b^3c \\ + 4b^3d \\ + 6b^2c^2 \\ + 12b^2cd \\ + 6b^2d^2 \\ + 4bc^3 \\ + 12bc^2d \\ + 12bcd^2 \\ + 4bd^3 \\ + c^4 \\ + 4c^3d \\ + 6c^2d^2 \\ + 4cd^3 \\ + d^4 \end{array} \right.$$

§. 82.

4. *Aufgabe.*

Es wird für $(a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots)^m = \pi^m$ eine Formel gesucht, und zwar für die Bedingung, dass m eine ganze positive Zahl ist.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \pi^m = m\,{}^{m}\mathfrak{M} + m\,{}^{m+1}\mathfrak{M}z + m\,{}^{m+2}\mathfrak{M}z^2 + m\,{}^{m+3}\mathfrak{M}z^3 + m\,{}^{m+4}\mathfrak{M}z^4 + \ldots$$

$$\binom{1,\,2,\,3,\,4,\,5\,\ldots}{a,\,b,\,c,\,d,\,e\,\ldots}$$

Beweis.

Aus dem Produkte der *m* Reihen (§. 74).

$$\begin{array}{l} a + bz + cz^2 + dz^3 + = \pi \\ A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + = \varrho \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 + \mathfrak{d}z^3 + = \sigma \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array}$$

also aus ${}^{m}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}} + {}^{m+1}\overset{...rqp}{\mathfrak{M}}z + {}^{m+2}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}z^2 + {}^{m+3}\overset{...rqp}{\mathfrak{M}}z^3 + {}^{m+4}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}z^4 + \ldots,$

wird die mte Dignität der Reihe $a + bz + cz^3 + \ldots$, wenn sich eine jede der andern Reihen in diese eben genannte verwandelt. Folglich ist $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)^m$

$$= {}^{m}\overset{.ppp}{\mathfrak{M}} + {}^{m+1}\overset{.ppp}{\mathfrak{M}}z + {}^{m+2}\overset{.ppp}{\mathfrak{M}}z^2 + {}^{m+3}\overset{.ppp}{\mathfrak{M}}z^3 + \ldots$$

$$= {}^{m}\mathfrak{M} + {}^{m+1}\mathfrak{M}z + {}^{m+2}\mathfrak{M}z^2 + {}^{m+3}\mathfrak{M}z^3 + \ldots$$

$$\binom{1,\,2,\,3\,\ldots}{a,\,b,\,c\,\ldots}$$

$$= m\,{}^{m}\mathfrak{M} + m\,{}^{m+1}\mathfrak{M}z + m\,{}^{m+2}\mathfrak{M}z^2 + m\,{}^{m+3}\mathfrak{M}z^3 + \ldots$$

$$\binom{1,\,2,\,3\,\ldots}{a,\,b,\,c\,\ldots}$$

1. Zusatz.

Es ist

$$\pi^m 7\,(n+1) = m\,{}^{m+n}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}}\,z^n, \text{ also } \pi^m 7\,(n+1)\,\varkappa = m\,{}^{m+n}\mathfrak{M}.$$

Beispiel.

Es soll $(a+bz+cz^2+dz^3)^6\,7\,5]$ entwickelt werden.

* * *

Da $(a+bz+cz^2+dz^3)^m\,7\,(n+1) = m\,{}^{m+n}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2,\,3,\,4}{a,\,b,\,c,\,d}}\,z^n$ ist

so ist auch $(a+bz+cz^2+dz^3)^6\,7\,5 = f\,{}^{6+4}F_{\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}}\,z^4 = f\,{}^{10}F_{\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}}\,z^4.$

Nach §. 33. ist aber

$${}^{10}F_{\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}} = \begin{matrix} 1\,1\,1\,1\,2\,4 \\ 1\,1\,1\,1\,3\,3 \\ 1\,1\,1\,2\,2\,3 \\ 1\,1\,2\,2\,2\,2 \end{matrix} = \begin{matrix} a\,a\,a\,a\,b\,d \\ a\,a\,a\,a\,c\,c \\ a\,a\,a\,b\,b\,c \\ a\,a\,b\,b\,b\,b \end{matrix}$$

$$\text{also } f\,{}^{10}F_{\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}} = \left.\begin{matrix} 30a^4bd \\ +\,15a^4c^2 \\ +\,60a^3b^2c \\ +\,15a^2b^4 \end{matrix}\right\}$$

§. 83.

3. Aufgabe.

Es soll $(az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots)^m = \pi^m$ unter der Voraussetzung entwickelt werden, dass m eine positive ganze Zahl ist.

Auf-

Auflösung.

Es ist $\pi^{m} = m^{m}\mathfrak{M}z^{m} + m^{m+1}\mathfrak{M}z^{m+1} + m^{m+2}\mathfrak{M}z^{m+2} +$
$m^{m+3}\mathfrak{M}z^{m+3} + \ldots$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ a, & b, & c, & d, & \ldots \end{pmatrix}$$

Beweis.

Es ist $(az + bz^{2} + cz^{3} + \ldots) = (a + bz + cz^{2} + \ldots)z$

also $(az + bz^{2} + cz^{3} + \ldots)^{m} = (a + bz + cz^{2} + \ldots)^{m}z^{m}$

Nun ist aber nach §. 82

$$(a + bz + cz^{2} + \ldots)^{m} = m^{m}\mathfrak{M} + m^{m+1}\mathfrak{M}z + m^{m+2}\mathfrak{M}z^{2} + .$$
$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4. & \ldots \\ a, & b, & c, & d & \ldots \end{pmatrix}$$

folglich auch $(az + bz^{2} + cz^{3} + \ldots)^{m}$

$$= (m^{m}\mathfrak{M} + m^{m+1}\mathfrak{M}z + m^{m+2}\mathfrak{M}z^{2} + \ldots)z^{m}$$
$$= m^{m}\mathfrak{M}z^{m} + m^{m+1}\mathfrak{M}z^{m+1} + m^{m+2}\mathfrak{M}z^{m+2} + \ldots$$
$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ a, & b, & c, & d, & \ldots \end{pmatrix}$$

3. *Zusatz.*

Es ist

$\pi^{m}\urcorner(n+1) = m^{m+n}\mathfrak{M}z^{m+n}$, also $\pi^{m}\urcorner(n+1)\varkappa = m^{m+n}\mathfrak{M}.$

§. 83.

6. *Aufgabe.*

Es wird für $(a + bz + cz^{2} + dz^{3} + \ldots)^{m}$ eine Formel verlangt, die so beschaffen ist, dass unter m eine jede beliebige Zahl gedacht werden kann.

Auf-

Auflösung.

Es ist $(a+bz+cz^2+\ldots)^m$

$$= a^m + {}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_a{}^1A\,z + \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_a{}^2A \\ + {}^m\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,{}_b{}^2B \end{matrix}\right\} z^2 +$$

$$\left.\begin{matrix} + {}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_a{}^3A \\ + {}^m\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,{}_b{}^3B \\ + {}^m\mathfrak{C}\,a^{m-3}\,{}_c{}^3C \end{matrix}\right\} z^3 \quad \left.\begin{matrix} + {}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_a{}^4A \\ + {}^m\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,{}_b{}^4B \\ + {}^m\mathfrak{C}\,a^{m-3}\,{}_c{}^4C \\ + {}^m\mathfrak{D}\,a^{m-4}\,{}_d{}^4D \end{matrix}\right| z^4 + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ b, & c, & d, & e \ldots \end{pmatrix}$$

Beweis.

Es sey $bz+cz^2+dz^3+\ldots = \Sigma$, so ist $a+bz+cz^2+dz^3+\ldots = a+\Sigma$ und daher $(a+bz+cz^2+dz^3+\ldots)^m = (a+\Sigma)^m =$
$a^m + {}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,\Sigma^1 + {}^m\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,\Sigma^2 + {}^m\mathfrak{C}\,a^{m-3}\,\Sigma^3 + \ldots$

Es ist aber nach §. 82

$$\begin{aligned}
\Sigma^1 &= {}_a{}^1A_{z} + {}_a{}^2A_{z^2} + {}_a{}^3A_{z^3} + {}_a{}^4A_{z^4} + \ldots \\
\Sigma^2 &= {}_b{}^2B_{z^2} + {}_b{}^3B_{z^3} + {}_b{}^4B_{z^4} + {}_b{}^5B_{z^5} + \ldots \\
\Sigma^3 &= {}_c{}^3C_{z^3} + {}_c{}^4C_{z^4} + {}_c{}^5C_{z^5} + {}_c{}^6C_{z^6} + \ldots \\
\Sigma^4 &= {}_d{}^4D_{z^4} + {}_d{}^5D_{z^5} + {}_d{}^6D_{z^6} + {}_d{}^7D_{z^7} + \ldots \\
'' \quad & \quad '' \qquad '' \qquad '' \qquad ''
\end{aligned}$$

folglich erhält man, wenn in der für $(a+\Sigma)^m$ entwickelten Formel, statt Σ, Σ^2, Σ^3, Σ^4 die hierfür eben angegebenen Werthe gesetzt werden, die Gleichung:

$(a+\Sigma)$

$$(a+\Sigma)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\left({}_a{}^1A\,z + {}_a{}^2A\,z^2 + {}_a{}^3A\,z^3 + \ldots\right) +$$
$$ {}^m\mathfrak{B}\,a^{m-2}\left({}_b{}^2B\,z^2 + {}_b{}^3B\,z^3 + {}_b{}^4B\,z^4 + \ldots\right) +$$
$$ {}^m\mathfrak{C}\,a^{m-3}\left({}_c{}^3C\,z^3 + {}_c{}^4C\,z^4 + {}_c{}^5C\,z^5 + \ldots\right) +$$
u. s. w. $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, \ldots \\ b. & c, & d, \ldots\end{matrix}\right)$

Multiplicirt man nun hier die in Klammern eingeschlossenen einzelnen Ausdrücke mit dem davor stehenden Factor und ordnet dann die Glieder der dadurch entstandenen Reihe so, dass jedesmal die Glieder unter einander kommen, welche die nämliche Dignität der z enthalten, so entsteht offenbar die in der Auflösung aufgestellte Gleichung.

1. *Zusatz.*

Es ist $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)^m \,7\,(n+1) =$

$$\left({}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_a{}^nA + {}^m\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,{}_b{}^nB + \ldots + {}^m\mathfrak{N}\,a^{m-n}\,{}_n\mathfrak{N}\right) z^n$$
$$\left(\begin{matrix}1, & 2. & 3 \ldots \\ b, & c, & d \ldots\end{matrix}\right)$$

1. *Beispiel.*

Es soll $(a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots)^{\frac{2}{3}}$ entwickelt werden,

* * *

Es ist $(a + bz + cz^2 + \ldots)^{\frac{2}{3}} =$

$$a^{\frac{2}{3}} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}\,{}_a{}^1A\,z + \left.\begin{matrix}{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}\;{}_a{}^2A \\ {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\,a^{\frac{2}{3}-2}\;{}_b{}^2B\end{matrix}\right\} z^2$$

$+ {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}$

$$\left.\begin{array}{l} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\, a^{\frac{2}{3}-1}\, {}_{a}^{3}A \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\, a^{\frac{2}{3}-2}\, {}_{b}^{3}B \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\, a^{\frac{2}{3}-3}\, {}_{c}^{3}C \end{array}\right\} z^{3} \quad \left.\begin{array}{l} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\, a^{\frac{2}{3}-1}\, {}_{a}^{4}A \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\, a^{\frac{2}{3}-2}\, {}_{b}^{4}B \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\, a^{\frac{2}{3}-3}\, {}_{c}^{4}C \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}\, a^{\frac{2}{3}-4}\, {}_{d}^{4}D \end{array}\right\} z^{4} + \ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots}{b,\ c,\ d\ \ldots}$$

Die Klassen, welche in jedem Gliede unter einander stehn, machen eine Klasseninvolution aus. Construirt man diese Klasseninvolutionen für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots}{b,\ c,\ d,\ e\ \ldots}$ nach der ersten rein combinatorischen Auflösung der Aufgabe des §. 29, so erhält man:

^{1}J	^{2}J	^{3}J	^{4}J	^{5}J	u. s. w.
b	c	d	e	f	
	bb	bc	bd	be	
		bbb	ce	cd	
			bbc	bbd	
			bbbb	bcc	
				bbbc	
				bbbbb	

Substituirt man nun die einzelnen Klassen dieser Involutionen für die Klassenzeichen der aufgestellten Gleichung und giebt jeder Complexion die ihr zugehörige Versetzungszahl, so wird:

$$(a + bz + cz^{2} + \cdot\cdot)^{\frac{2}{3}} =$$

$$a^{\frac{2}{3}} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\, a^{\frac{2}{3}-1}\, bz + \left.\begin{array}{l} {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\, a^{\frac{2}{3}-1}\, c \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\, a^{\frac{2}{3}-2}\, b^{2} \end{array}\right\} z^{2} \quad \left.\begin{array}{l} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\, a^{\frac{2}{3}-1}\, d \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\, a^{\frac{2}{3}-2}\, 2bc \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\, a^{\frac{2}{3}-3}\, b^{3} \end{array}\right\} z^{3}$$

$+ {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}$

$$\left.\begin{array}{l} +\,^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}e \\ +\,^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\,a^{\frac{2}{3}-2}(2bd+c^2) \\ +\,^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\,a^{\frac{2}{3}-3}3b^2c \\ +\,^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}\,a^{\frac{2}{3}-4}b^4 \end{array}\right\} z^4 + \left.\begin{array}{l} ^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}f \\ +\,^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\,a^{\frac{2}{3}-2}(2be+2cd) \\ +\,^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\,a^{\frac{2}{3}-3}(3b^2d+3bc^2) \\ +\,^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}\,a^{\frac{2}{3}-4}4b^3c \\ +\,^{\frac{2}{3}}\mathfrak{E}\,a^{\frac{2}{3}-5}b^4 \end{array}\right\} z^5 + \ldots$$

Werden hier nun noch die Binomialcoefficienten entwickelt, so hat man das Verlangte.

Anmerkung.

Es war gar nicht nöthig, wie vorhin geschehn ist, fünf einzelne Klasseninvolutionen zu construiren, sondern die Construction der einzigen ^5J war schon hinreichend, weil sie die vorhergehenden mit in sich begreift. (§. 29, α) Rein comb. Aufl. 1 Anmerkung). Man hätte auch statt der Klasseninvolution eine lexicographische wählen (§. 29, β) Rein comb. Aufl.) oder die Klassen unmittelbar aus der Figur pag. 101 nehmen können. (§. 29, β, Rein comb. Aufl. 6. Zus.).

2. *Beispiel.*

Es wird $(a+bz+cz^2dz^3)^{-4/6}$ gesucht.

* * *

Nach dem ersten Zusatze ist $(a+bz+cz^2+dz^3)^{-4/6} =$

$$\left({}^{-4}\mathfrak{A}\,a^{--5}\,{}_a^5A + {}^{-4}\mathfrak{B}\,a^{--6}\,{}_b^5B + {}^{-4}\mathfrak{C}\,a^{--7}\,{}_c^5C + {}^{-4}\mathfrak{D}\,a^{--8}\,{}_b^5D + {}^{-4}\mathfrak{E}\,a^{--9} + {}_e^5E\right) z^{-5}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3}{b,\ c,\ d}$$

Für

Für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3}{b,\ c,\ d}$ giebt es keine ${}^5A$, die übrigen Klassen finden aber statt und zwar es ist

$$ {}^5B = cd,\quad {}^5C = \begin{matrix} bbd, \\ bcc \end{matrix} \quad {}^5D = bbbc,\quad {}^5E = bbbbb. $$

Daher $(a + bz + cz^2 + dz^3)^{-4}$ 57

$$ = \left({}^{-4}\mathfrak{B}_a{}^{-6}\,2cd + {}^{-4}\mathfrak{C}_a{}^{-7}(3b^2d + 3bc^2) + {}^{-4}\mathfrak{D}_a{}^{-8}\,4b^3c + {}^{-4}\mathfrak{E}_a{}^{-9}b^5\right)z^{-5}. $$

$$ = \left(20a^{-6}cd - 60a^{-7}(b^2d + bc^2) + 140a^{-8}b^3c - 56a^{-9}b^5\right)z^{-5}. $$

2. *Zusatz.*

Da im ersten Zusatze unter m eine jede Zahl gedacht werden darf, so findet auch zwischen dem dort aufgestellten Werthe des $n+1$ten Gliedes und zwischen dem Werthe, der im Zusatze des §. 82 angegeben ist eine Gleichung statt. Es ist nämlich unter der Bedingung, daß m eine ganze positive Zahl ist

$$ {}_m^{m+n}\mathfrak{M}_{z^n} = \Big({}^m\mathfrak{A}_a^{m-1}\;{}_a^nA + {}^m\mathfrak{B}_a^{m-2}\;{}_b^nB + {}^m\mathfrak{C}_a^{m-3}\;{}_c^nC + \dots + {}^m\mathfrak{N}_a^{m-n}\;{}_n^nN\Big)z^n. $$
$$ \binom{1,\ 2,\ 3,\dots}{a,\ b,\ c,\dots} \qquad\qquad \binom{1,\ 2,\ 3,\dots}{b,\ c,\ d,\dots} $$

Ist hier $n > m$, so bricht der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitzeichens mit ${}^m\mathfrak{M}\ {}_m^m\mathfrak{M}$ ab.

Anmerkung.

Dividirt man beide Seiten der Gleichung durch z^n und denkt ſich die Polynomial- und Binomialcoefficienten weg, ſo erhält man

$$\underset{\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}}{{}^{n+m}\mathfrak{M}} = a^{m-1}\,{}^{n}A + a^{m-2}\,{}^{n}B + a^{m-3}\,{}^{n}C + \ldots + a^{m-n}\,\underset{\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}}{{}^{n}\mathfrak{N}}.$$

Dieſe Gleichung iſt für $\underset{\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}}{{}^{n+m}\mathfrak{M}}$ die nämliche, welche die im zweiten Zuſatze des §. 30 zuletzt aufgeſtellte für $\underset{\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}}{{}^{r+n}\mathfrak{N}}$ iſt, und daher ſind in der Gleichung des zweiten Zuſatzes die Ausdrücke ${}^{m}\mathfrak{A}_{a}$, ${}^{m}\mathfrak{B}_{b}$, ${}^{m}\mathfrak{C}_{c}$, ${}^{m}\mathfrak{D}_{d}$ u. ſ. f. nichts anders als die Polynomialcoefficienten, welche der Ausdruck ${}^{m+n}_{m}\mathfrak{M}$ durch ſeinen Coefficienten $\mathfrak{m}$ anzeigt.

§. 85.

7. *Aufgabe.*

Es wird für $(az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots)^m$ eine Formel geſucht und zwar unter der Bedingung, daſs unter m eine jede ganze und gebrochne, ſowohl poſitive als uegative Zahl, gedacht werden darf.

Auflösung.

Es ist $(az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots)^m =$

$$a^m z^m + {}^{m}\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_{a}^{1}A\,z^{m+1} + \left.\begin{matrix} {}^{m}\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_{a}^{2}A \\ + {}^{m}\mathfrak{B}\,{}_{2}^{m-2}\,{}_{b}^{2}B \end{matrix}\right\} z^{m+2}$$

$$\left.\begin{matrix} + {}^{m}\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_{a}^{3}A \\ + {}^{m}\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,{}_{b}^{3}B \\ + {}^{m}\mathfrak{C}\,a^{m-3}\,{}_{c}^{3}C \end{matrix}\right\} z^{m+3} + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ b, & c, & d, & e\ldots \end{pmatrix}$$

Beweis.

Es ist $az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots = (a+bz+cz^2+dz^3+\ldots)z$, folglich $(az+bz^2+cz^3dz^4+\ldots)^m = (a+bz+cz^2+dz^3+\ldots)^m z^m$,

Man erhält also das Verlangte, wenn man die Formel, welche in der Auflösung der 6ten Aufgabe angegeben ist, mit z^m multiplicirt. Geschieht aber dieses, so bekömmt man die Formel der eben gegebenen Auflösung folglich ist diese auch die richtige.

Zusatz.

$$(az+bz^2+cz^3+\ldots)^m\,7\,(n+1) =$$

$$\big({}^{m}\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_{a}^{n}A + {}^{m}\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,{}_{b}^{n}B + {}^{m}\mathfrak{C}\,a^{m-3}\,{}_{c}^{n}C + {}^{m}\mathfrak{D}\,a^{m-4}\,{}_{d}^{n}D + \ldots + {}^{m}\mathfrak{N}\,a^{m-n}\,{}_{n}^{n}\mathfrak{N}\big)\,z^{m+n}.$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ b, & c, & d, & e\ldots \end{pmatrix}$$

§. 86.

3. *Aufgabe.*

Es soll $q^m = (az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^m$ für den Fall entwickelt werden, dass unter m nur eine positive ganze Zahl gedacht wird.

Auf-

Auflösung.

Es ist $q^m = (az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \,..)^m =$

$${}^{m}_{m}\mathfrak{M}\, z^{m\mu} + {}^{m+1}_{m}\mathfrak{M}\, z^{m\mu+\delta} + {}^{m+2}_{m}\mathfrak{M}\, z^{n\mu+2\delta} + {}^{m+3}_{m}\mathfrak{M}\, z^{n\mu+3\delta} + \ldots\ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ a, & b, & c, & d\ldots \end{matrix}\right)$$

Beweis.

Es ist $az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \,.. =$ $(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \,..)z^\mu$,

also auch $(az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \,..)^m =$ $(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \,..)^m z^{m\mu}$.

Vergleicht man $a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \,..$ mit $a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$, so erhellet, dass $a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \ldots$ entsteht, wenn man in $a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$, z^δ statt z, $z^{2\delta}$ statt z^2, $z^{3\delta}$ statt z^3 schreibt u. s. w. Aus diesem Grunde muss man aus $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \,..)^m$ auch $(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \ldots)^m$ erhalten, wenn man darinn z^δ für z, $z^{2\delta}$ für z^2, $z^{3\delta}$ für z^3 substituirt u. s. f.

Da also $(a + bz + cz^2 + \ldots)^m =$

$${}^{m}_{m}\mathfrak{M} + {}^{m+1}_{m}\mathfrak{M}\, z + {}^{m+2}_{m}\mathfrak{M}\, z^2 + {}^{m+3}_{m}\mathfrak{M}\, z^3 + \,.. \text{(§. 82)}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & .. \\ a, & b, & c, & .. \end{matrix}\right)$$

so ist $(a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)^m =$

$$ {}_m{}^{m}\mathfrak{M} + {}_m{}^{m+1}\mathfrak{M}z^{\delta} + {}_m{}^{m+2}\mathfrak{M}z^{2\delta} + {}_m{}^{m+3}\mathfrak{M}z^{3\delta} + \ldots \binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{a,\ b,\ c,\ \ldots} $$

und deswegen $(a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)^m z^{m\mu} =$

$$ {}_m{}^{m}\mathfrak{M}z^{m\mu} + {}_m{}^{m+1}\mathfrak{M}z^{m\mu+\delta} + {}_m{}^{m+2}\mathfrak{M}z^{m\mu+2\delta} + \ldots \binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{a,\ b,\ c,\ \ldots} $$

Zusatz.

$\overline{q^m}\,7\,(n+1) = {}_m{}^{m+n}\mathfrak{M}z^{m\mu+n\delta}$ und daher

$q^m\,7\,(n+1)\,\varkappa = {}_m{}^{m+n}\mathfrak{M}.$

Beispiel.

Es wird das 6te Glied der $(az^3 + bz^5 + cz^7 + dz^9 + \ldots)^3$ gesucht.

* * *

Hier ist $m = 3$, $\mathfrak{M} = C$, $\mu = 3$, $\delta = 2$, $n = 5$; folglich das gesuchte Glied gleich ${}_c{}^{8}C z^{19} \binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots}{a,\ b,\ c\ \ldots}$. Es ist aber ${}^{8}C \binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots}{a,\ b,\ c\ \ldots} =$

a	a	f,
a	b	e
a	c	d
b	b	d
b	c	c

also auch

$$ {}_c{}^{8}C z^{19} \binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots}{a,\ b,\ c\ \ldots} = \left.\begin{matrix} 3a^2f \\ + 6abe \\ + 6acd \\ + 3b^2d \\ + 3bc^2 \end{matrix}\right\} z^{19}. $$

§. 87.

9. *Aufgabe.*

Es wird für $p^m = (az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^m$ eine Formel gesucht, die für jeden Exponenten m paſst, er mag eine ganze oder gebrochne, poſitive oder negative Zahl seyn.

Auflöſung.

Es iſt

$$p^m = a^m z^{m\mu} + {}^{m}\mathfrak{A}_{a}^{m-1}\,{}^{1}_{a}A\, z^{m\mu+\delta} + \left.\begin{matrix} {}^{m}\mathfrak{A}_{a}^{m-1}\,{}^{2}_{a}A \\ + {}^{m}\mathfrak{B}_{a}^{m-2}\,{}^{2}_{b}B \end{matrix}\right\} z^{m\mu+2\delta}$$

$$+ \left.\begin{matrix} {}^{m}\mathfrak{A}_{a}^{m-1}\,{}^{3}_{a}A \\ + {}^{m}\mathfrak{B}_{a}^{m-2}\,{}^{3}_{b}B \\ + {}^{m}\mathfrak{C}_{a}^{m-3}\,{}^{3}_{c}C \end{matrix}\right\} z^{m\mu+3\delta} + \left.\begin{matrix} {}^{m}\mathfrak{A}_{a}^{m-1}\,{}^{4}_{a}A \\ + {}^{m}\mathfrak{B}_{a}^{m-2}\,{}^{4}_{b}B \\ + {}^{m}\mathfrak{C}_{a}^{m-3}\,{}^{4}_{c}C \\ + {}^{m}\mathfrak{D}_{a}^{m-4}\,{}^{4}_{d}D \end{matrix}\right\} z^{m\mu+4\delta} + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ b, c, d, e, \ldots \end{pmatrix}$$

Beweis.

Es iſt $(az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + \ldots)^m =$ $(a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)^m z^{m\mu}$ (§. 85. Aufl.).

Da nun aus $(a + bz + cz^2 + \ldots)$ die Reihe $(a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)$ wird, wenn man z^{δ} für z, $z^{2\delta}$ für z^2 ſetzt u. ſ. w. ſo iſt klar, daſs man die geſuchte Formel erhält, wenn man in der Formel der Auflöſung der 6ten Aufgabe die eben genannte Subſtitution vornimmt und hierauf den hierdurch erhaltenen Ausdruck mit $z^{m\mu}$ multiplicirt. Nimmt man aber dieſe Operation vor, ſo bekömmt man die ge-

gebene

gebene Auflösung der 9ten Aufgabe, folglich ist diese Auflösung auch die richtige.

Zusatz.

$$p^m 7 (n+1 (= ({}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^nA + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^nB + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^nC + \ldots + {}^m\mathfrak{N}_a{}^{m-n}{}_n{}^n\mathfrak{N})_z{}^{m\mu+n\delta}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2, & 3, & 4.. \\ b, & c, & d, & e.. \end{matrix}\right)$$

Beispiel.

Es soll $(az^5 + bz^3 + cz^1 + dz^{-1} + ez^{-3} + \ldots)^{\frac{2}{3}} 7 7 = q^{\frac{2}{3}} 7 7$ entwickelt werden.

* * *

Hier ist $m = \frac{2}{3}$, $\mu = 5$, $\delta = -2$, $n = 6$, $\mathfrak{N} = F$, und folglich

$$q^{\frac{2}{3}} 7 = {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_a{}^{\frac{2}{3}-1}{}_a{}^6A + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}_a{}^{\frac{2}{3}-2}{}_b{}^6B + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}_a{}^{\frac{2}{3}-3}{}_c{}^6C + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}_a{}^{\frac{2}{3}-4}{}_d{}^6D + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{E}_a{}^{\frac{2}{3}-5}{}_e{}^6E + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{F}_a{}^{\frac{2}{3}-6}{}_f{}^6F)_z{}^{-\frac{26}{3}}.$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3.. \\ b, & c, & d.. \end{matrix}\right)$$

Da nun $\underset{\left(\begin{smallmatrix} 1, & 2, & 3.. \\ b, & c, & d.. \end{smallmatrix}\right)}{{}^6J} = \begin{array}{rl} \underline{g} & {}^6A \\ bf & \\ ce & {}^6B \\ \underline{dd} & \\ bbe & {}^6C \\ bcd & \\ \underline{ccc} & \\ bbbd & {}^6D \\ \underline{bbcc} & \\ \underline{bbbbc} & {}^6E \\ bbbbbb & {}^6F \end{array}$, so ist auch

$$q^{\frac{2}{3}}77 = \left(\tfrac{2}{3}\mathfrak{A}a^{\frac{2}{3}-1}g + \tfrac{2}{3}\mathfrak{B}a^{\frac{2}{3}-2}(2bf + 2ce + d^2) + \tfrac{2}{3}\mathfrak{C}a^{\frac{2}{3}-3}(3b^2e + 6bcd + c^3) + \tfrac{2}{3}\mathfrak{D}a^{\frac{2}{3}-4}(4b^3d + 6b^2c^2) + \tfrac{2}{3}\mathfrak{E}a^{\frac{2}{3}-5}\,5b^4c + \tfrac{2}{3}\mathfrak{F}a^{\frac{2}{3}-6}\,b^6\right)z^{-\frac{26}{3}}.$$

§. 88.

10. *Aufgabe.*

Für die mte Dignität der Reihe $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + .. = p$ eine Formel anzugeben, die unter der Voraussetzung richtig ist, dass man sich unter m nur eine positive ganze Zahl denkt.

Auflösung.

Es ist $p^m = {}_m{}^{m}\mathfrak{M}z^* + {}_m{}^{m+1}\mathfrak{M}z^* + {}_m{}^{m+2}\mathfrak{M}z^* + {}_m{}^{m+3}\mathfrak{M}z^* + \ldots..$

$$\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4, .. \\ A, B, C, D, ..\end{pmatrix}$$

Beweis.

Es ist hier p^m ein Produkt aus m Factoren deren ein jeder gleich $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + ..$ ist, folglich ist auch (§. 77) hier

$$p^m = {}^{m}\overset{..ppp}{\mathcal{M}}z^* + {}^{m+1}\overset{...ppp}{\mathcal{M}}z^* + {}^{m+2}\overset{..ppp}{\mathcal{M}}z^* + {}^{m+3}\overset{...ppp}{\mathcal{M}}z^* + {}^{m+4}\overset{..ppp}{\mathcal{M}}z^* + {}^{m+5}\overset{..ppp}{\mathcal{M}}z^* + \ldots.$$

$$= {}_m{}^{m}\mathfrak{M}z^* + {}_m{}^{m+1}\mathfrak{M}z^* + {}_m{}^{m+2}\mathfrak{M}z^* + {}_m{}^{m+3}\mathfrak{M}z^* + {}^{m+4}\mathfrak{M}z^* + \ldots$$

$$\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4, .. \\ A, B, C, D, ..\end{pmatrix}$$

 Zu-

3, Zusatz.

Es ist

$$p^{m}\urcorner(n+1) = m^{m+n}\mathfrak{M}z^{*} \text{ und daher } \pi^{m}\urcorner(n+1)\,\varkappa = m^{m+n}\mathfrak{M}$$

Beispiel.

Es soll $p^{5}\urcorner 8$ angegeben werden.

* * *

Da hier $m = 5$ und $n = 7$ ist, so ist $p^{5}\urcorner 8 = {}_{e}{}^{12}\mathfrak{E}z^{*}$.

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3\,.. \\ A, & B, & C\,..\end{matrix}\right)$$

Es ist aber ${}^{12}\mathfrak{E}$, also auch $p^{5}\urcorner 8$

||

A	A	A	A	H
A	A	A	B	G
A	A	A	C	F
A	A	A	D	E
A	A	B	B	F
A	A	B	C	E
A	A	B	D	D
A	A	C	C	D
A	B	B	B	E
A	B	B	C	D
A	B	C	C	C
B	B	B	B	D
B	B	B	C	C

$$\begin{aligned}
p^{5}\urcorner 8 = \; & 5A^{4}Hz^{4a+h} \\
& + 20A^{3}BGz^{3a+b+g} \\
& + 20A^{3}CFz^{3a+c+f} \\
& + 20A^{3}DEz^{3a+d+e} \\
& + 30A^{2}B^{2}Fz^{2a+2b+f} \\
& + 60A^{2}BCEz^{2a+b+c+e} \\
& + 30A^{2}BD^{2}z^{2a+b+2d} \\
& + 30A^{2}C^{2}Dz^{2a+2c+d} \\
& + 20AB^{3}Ez^{a+3b+e} \\
& + 60AB^{2}CDz^{a+2b+c+d} \\
& + 20ABC^{3}z^{a+b+3c} \\
& + 5B^{4}Dz^{4b+d} \\
& + 10B^{3}C^{2}z^{3b+2c}
\end{aligned}$$

Anmerkung.

Daſs die Werthe des * in ${}_{e}{}^{12}\mathfrak{E}z^{*}$ hier richtig bestimmt ſind erhellet aus §. 70 δ).

§. 89.

§. 89.

11. *Aufgabe.*

Für $(Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots)^m = q^m$ unter der Bedingung eine Formel anzugeben, daſs unter m ſowohl eine poſitive als negative, ſowohl eine ganze als gebrochne Zahl gedacht werden darf.

Auflöſung.

Es iſt $q^m = A^m z^{ma} +$

$$ {}^{m}\mathfrak{A}\,A^{m-1}z^{(m-1)a}\left[\begin{array}{l} {}_{\mathfrak{a}}{}^{1}\mathfrak{A}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{a}}{}^{2}\mathfrak{A}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{a}}{}^{3}\mathfrak{A}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{a}}{}^{4}\mathfrak{A}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{a}}{}^{5}\mathfrak{A}z^{*} \end{array}\right. + {}^{m}\mathfrak{B}\,A^{m-2}z^{(m-2)a}\left[\begin{array}{l} {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\mathfrak{B}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\mathfrak{B}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\mathfrak{B}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{b}}{}^{5}\mathfrak{B}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{b}}{}^{6}\mathfrak{B}z^{*} \end{array}\right. $$

$$ + {}^{m}\mathfrak{C}\,A^{m-3}z^{(m-3)a}\left[\begin{array}{l} + {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\mathfrak{C}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{c}}{}^{4}\mathfrak{C}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{c}}{}^{5}\mathfrak{C}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{c}}{}^{6}\mathfrak{C}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{c}}{}^{7}\mathfrak{C}z^{*} \end{array}\right. + {}^{m}\mathfrak{D}\,A^{m-4}z^{(m-4)a}\left[\begin{array}{l} {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\mathfrak{D}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\mathfrak{D}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{d}}{}^{6}\mathfrak{D}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{d}}{}^{7}\mathfrak{D}z^{*} \\ + {}_{\mathfrak{d}}{}^{8}\mathfrak{D}z^{*} \end{array}\right. $$

u. ſ. w. $\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots \\ B,\ C,\ D,\ E\ldots \end{array}\right)$

Beweis.

Es ſey $(Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots)^m = Z$, ſo iſt $q^m = (Az^a + Z)^m$, alſo

$$= A^m z^{ma} + {}^{m}\mathfrak{A}\,A^{m-1}z^{(m-1)a}Z^1 + {}^{m}\mathfrak{B}\,A^{m-2}z^{(m-2)a}Z^2 + {}^{m}\mathfrak{C}\,A^{m-3}z^{(m-3)}Z^3 + \ldots$$

Da nun nach §. 87.

$$
\begin{aligned}
z^1 &= {}_a{}^1\mathrm{A}_{z*} + {}_a{}^2\mathrm{A}_{z*} + {}_a{}^3\mathrm{A}_{z*} + {}_a{}^4\mathrm{A}_{z*} + {}_a{}^5\mathrm{A}_{z*} + \dots \\
z^2 &= {}_b{}^2\mathrm{B}_{z*} + {}_b{}^3\mathrm{B}_{z*} + {}_b{}^4\mathrm{B}_{z*} + {}_b{}^5\mathrm{B}_{z*} + {}_b{}^6\mathrm{B}_{z*} + \dots \\
z^3 &= {}_c{}^3\mathrm{C}_{z*} + {}_c{}^4\mathrm{C}_{z*} + {}_c{}^5\mathrm{C}_{z*} + {}_c{}^6\mathrm{C}_{z*} + {}_c{}^7\mathrm{C}_{z*} + \dots \\
z^4 &= {}_d{}^4\mathrm{D}_{z*} + {}_d{}^5\mathrm{D}_{z*} + {}_d{}^6\mathrm{D}_{z*} + {}_d{}^7\mathrm{D}_{z*} + {}_d{}^8\mathrm{D}_{z*} + \dots \\
&'' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \\
&\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \dots \\ \mathrm{B}, & \mathrm{C}, & \mathrm{D}, & \mathrm{E} \dots \end{matrix}\right)
\end{aligned}
$$

so ist einleuchtend, daſs die gegebene Auflösung richtig ist, weil ihre Formel entsteht wenn man in der Formel für $(Az^a + Z)^m$ statt Z^1, Z^2, Z^3, Z^4, u. s. f. die hierfür eben entwickelten Werthe substituirt.

Zusatz.

Es ist $(Az^a + Bz^b + Cz^c +, \dots)^m 7\, (n+1) =$

$$
{}^m\mathfrak{N}\,\mathrm{A}^{(m-n)} z^{(m-n)a} \left\{ \begin{matrix} + {}_n{}^{n}\mathfrak{N}_{z*} \\ + {}_n{}^{n+1}\mathfrak{N}_{z*} \\ + {}_n{}^{n+2}\mathfrak{N}_{z*} \\ + {}_n{}^{n+3}\mathfrak{N}_{z*} \\ '' \quad '' \quad '' \end{matrix} \right.
\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3 \dots \\ \mathrm{B}, & \mathrm{C}, & \mathrm{D} \dots \end{matrix}\right)
$$

Beispiel.

Es soll $(Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \dots)^{-3} = p^{-3}$ entwickelt werden.

* * *

Die hierhergehörige allgemeine Formel entsteht aus der Formel der Auflösung, wenn man darinn statt m, -3 setzt.

setzt. Um die Klassen zu entwickeln dient hier vorzüglich die lexicographische Involution:

```
″ B B B B B B B B¹  𝔷
″ B B B B B B C   ²𝔷
″ B B B B B D    ³𝔷
″ B B B B C C   ⁴𝔷
″ B B B B E
″ B B B C D   ⁵𝔷
″ B B B F
″ B B C C C
″ B B C E
″ B B D D   ⁶𝔷
″ B B G
″ B C C D
″ B C F
″ B D E
″ B H    ⁷𝔷
″ C C C C
″ C C E
″ C D D
″ C G
″ D F
″ E E   ⁸𝔷
″ I
″ ″ ″
```

Nimmt man hieraus die einzelnen Klassen und giebt jeder Complexion den ihr zugehörigen Polynomialcoefficienten, so wird $p^{-3} =$

$$A^{-3}z^{-3a} + {}^{-3}\mathfrak{A}\,A^{-4}z^{-4a}\left\{\begin{array}{l} Bz^{b} \\ +Cz^{c} \\ +Dz^{d} \\ +Ez^{e} \\ \;'' \end{array}\right. + {}^{-3}\mathfrak{B}\,A^{-5}z^{-5a}\left\{\begin{array}{l} B^{2}z^{2b} \\ +2BCz^{b+c} \\ +2BDz^{b+d} + C^{2}z^{2c} \\ +2BEz^{b+e} + 2CDz^{c+d} \\ \;'' \qquad\qquad '' \end{array}\right.$$

$$+ {}^{-3}\mathfrak{C}\,A^{-6}z^{-6a}\left\{\begin{array}{l} B^{3}z^{3b} \\ +3B^{2}Cz^{2b+c} \\ +3B^{2}Dz^{2b+d} + 3BC^{2}z^{b+2c} \\ +3B^{2}Ez^{2b+e} + 6BCDz^{b+c+d} + C^{3}z^{3c} \\ \;'' \qquad\qquad '' \qquad\qquad '' \end{array}\right.$$

$^{-3}\mathfrak{D}$

$$+^{\cdots 3}\mathfrak{D}A^{\cdots 7a}\left\{\begin{array}{l} B^4z^{4b} \\ +4B^3Cz^{3b+c} \\ +4B^3Dz^{3b+d}+6B^2C^2z^{2b+2c} \\ +4B^3Ez^{3b+e}+12B^2CDz^{2b+c+d}+4BC^3z^{b+3c} \end{array}\right.$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Anmerkung.

Hat eine gegebene Reihe eine beſtimmte Anzahl z. B. n+1 Glieder, ſo hat die höchſte Union für den Zeiger$\binom{1,2,3,4\,..\,n}{b,c,d,e\,..\,p}$ die Summe n, die höchſte Binion beſitzt die Summe 2n, die höchſte Ternion die Summe 3n u. ſ. w. Conſtruirt man alſo in dieſem Falle z. B. eine lexicographiſche Involution zur Summe 3n, ſo ſind alle Binionen darinn unnütze, welche eine gröſsere Summe haben als 2n beträgt und alle Unionen ſind unnütze, welchen eine gröſsere Summe zukömmt als n ausmacht. Es ſoll daher in der Folge noch eine Methode angegeben werden die lexicographiſche Involution ſo abzukürzen, daſs ſie bei einer begrenzten Reihe die unnützen Complexionen übergeht.

IV. Combinatoriſche Entwickelung der Produkte der Dignitäten mehrerer Reihen.

§. 90.

1. *Aufgabe.*

Es ſind m Reihen, p, q, r, s u. ſ. w. gegeben, deren eine jede z enthält und die Form $a+bz+cz^2+dz^3+\,..$ hat, es ſoll das Produkt der Dignitäten p^b, q^c, r^d, s^e u. ſ. f. beſtimmt werden.

Auf-

Auflösung.

Es ist für den Zeiger

$$\left|\begin{array}{llll l} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ p^b\varkappa 1, & p^b\varkappa 2, & p^b\varkappa 3, & p^b\varkappa 4 \ldots & = \pi \\ q^c\varkappa 1, & q^c\varkappa 2, & q^c\varkappa 3, & q^c\varkappa 4 \ldots & = \varrho \\ r^d\varkappa 1, & r^d\varkappa 2, & r^d\varkappa 3, & r^d\varkappa 4 \ldots & = \sigma \\ s^e\varkappa 1, & s^e\varkappa 2 & s^e\varkappa 3, & s^e\varkappa 4 \ldots & = \tau \\ '' & '' & '' & '' & '' \end{array}\right|$$

$$\ldots s^e r^d q^c p^b = {}^{m}\overset{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}} + {}^{m+1}\overset{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}z + {}^{m+2}\overset{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}z^2 + {}^{m+3}\overset{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}z^3 + \ldots$$

Beweis.

Eine jede der Reihen p^b, q^c, r^d, s^e hat nach §. 82 und §. 84 die Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots$

Man kann also setzen

$$\begin{array}{lll} p^b & = & p^b\varkappa 1 + p^b\varkappa 2.z + p^b\varkappa 3.z^2 + p^b\varkappa 4.z^3 + p^b\varkappa 5.z^4 + \ldots\ldots \\ q^c & = & q^c\varkappa 1 + q^c\varkappa 2.z + q^c\varkappa 3.z^2 + q^c\varkappa 4.z^3 + q^c\varkappa 5.z^4 + \ldots\ldots \\ r^d & = & r^d\varkappa 1 + r^d\varkappa 2.z + r^d\varkappa 3.z^2 + r^d\varkappa 4.z^3 + r^d\varkappa 5.z^4 + \ldots\ldots \\ s^e & = & s^e\varkappa 1 + s^e\varkappa 2.z + s^e\varkappa 3.z^2 + s^e\varkappa 4.z^3 + s^e\varkappa 5.z^4 + \ldots\ldots, \\ & & '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \end{array}$$

Das Produkt dieser m Reihen erhält man aber, wenn man aus ihren Coefficienten so einen Zeiger bildet, wie in der Auflösung angegeben ist und hierfür die Klassen ${}^{m}\mathcal{M}$, ${}^{m+1}\mathcal{M}$, ${}^{m+2}\mathcal{M}$, ${}^{m+3}\mathcal{M}$ u. s. f. entwickelt und ${}^{m+1}\mathcal{M}$ mit z, ${}^{m+2}\mathcal{M}$ mit z^2, ${}^{m+3}\mathcal{M}$ mit z^3 mul-

multiplicirt u. s. w. (§. 74) folglich ist auch das in der Auflösung aufgestellte Produkt richtig.

1. *Zusatz.*

Es ist $\ldots s^e r^d q^c p^b 7\,(n+1) = {}^{m+n}\overset{\ldots\tau\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}}_{z^n}$, also

$$\ldots s^e r^d p^c q^b 7\,(n+1)\varkappa = {}^{m+n}\overset{\ldots\tau\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}}.$$

2. *Zusatz.*

Es ist $p^b q^c = {}^2\overset{\rho\pi}{B} + {}^3\overset{\rho\pi}{B}z + {}^4\overset{\rho\pi}{B}z^2 + {}^5\overset{\rho\pi}{B}z^3 + {}^6\overset{\rho\pi}{B}z^4 + \ldots$

$$= q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 1 + \left.\begin{matrix} q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 2 \\ + q^c\varkappa 2 . p^b\varkappa 1 \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 3 \\ + q^c\varkappa 2 . p^b\varkappa 2 \\ + q^c\varkappa 3 . p^b\varkappa 1 \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 4 \\ + q^c\varkappa 2 . p^b\varkappa 3 \\ + q^c\varkappa 3 . p^b\varkappa 2 \\ + q^c\varkappa 4 . p^b\varkappa 1 \end{matrix}\right\} z^3 + \ldots$$

3. *Zusatz.*

Es ist $r^d q^c p^b = {}^3\overset{\sigma\rho\pi}{C} + {}^4\overset{\sigma\rho\pi}{C}z + {}^5\overset{\sigma\rho\pi}{C}z^2 + {}^6\overset{\sigma\rho\pi}{C}z^3 + {}^7\overset{\sigma\rho\pi}{C}z^4 + {}^8\overset{\sigma\rho\pi}{C}z^5 + \ldots$

$$= r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 1 + \left.\begin{matrix} r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 2 \\ + r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 2 . p^b\varkappa 1 \\ + r^d\varkappa 2 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 1 \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 3 \\ + r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 2 . p^d\varkappa 2 \\ + r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 3 . p^b\varkappa 1 \\ + r^d\varkappa 2 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 2 \\ + r^d\varkappa 2 . q^c\varkappa 2 . p^b\varkappa 1 \\ + r^d\varkappa 3 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 1 \end{matrix}\right\} z^2$$

u. s. w. u. s. w.

1. *Anmerkung.*

Aus den letzten beiden Zusätzen wird hinreichend erhellen, wie leicht man die Produkte durch das

das Localzeichen $\varkappa$ ausdrücken kann Werden in solchen Localausdrücken, die Coefficienten selbst, für ihre Stellvertreter gesetzt, welches gar keine Schwierigkeiten macht, so hat man das Produkt vollständig entwickelt.

Beispiel. a).

Es sey $p^2 = (a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots)^2$

und $p^3 = (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots)^3$

Es soll $p^2\, q^3$ vollständig entwickelt werden.

* * *

Hier ist

$$p^2 = a^2 + 2abz + \left.\begin{array}{l} 2ac \\ + b^2 \end{array}\right\} z^2 + \left.\begin{array}{l} 2ad \\ + 2bc \end{array}\right\} z^3 + \left.\begin{array}{l} 2ae \\ + 2bd \\ + c^2 \end{array}\right\} z^4 + \ldots$$

$$q^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta z + \left.\begin{array}{l} 3\alpha^2\gamma \\ + 3\alpha\beta^2 \end{array}\right\} z^2 + \left.\begin{array}{l} 3\alpha^2\delta \\ + 6\alpha\beta\gamma \\ + \beta^3 \end{array}\right\} z^3 + \left.\begin{array}{l} 3\alpha\varepsilon^2 \\ + 6\alpha\beta\delta \\ + 3\alpha\gamma^2 \\ + 3\beta^2\gamma \end{array}\right\} z^2 + \ldots$$

und daher ist nach dem zweiten Zusatze

$$p^2q^3 = \alpha^3a^2 + \left.\begin{array}{l} \alpha^3.2ab \\ + 3\alpha^2\beta.a^2 \end{array}\right\} z + \left.\begin{array}{l} \alpha^3(2ac + b^2) \\ + 3\alpha^2\beta.2ab \\ + (3\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2)a^2 \end{array}\right\} z^2 +$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^3(2ad + 2bc) \\ + 3\alpha^2\beta(2ac + b^2) \\ + (3\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2).2ab \\ + (3\alpha^2\delta + 6\alpha\beta\gamma + \beta^3)a^2 \end{array}\right\} z^3 + \ldots$$

§. 91.

a) Soll nur im allgemeinen die Form des Produkts p^2q^3 angegeben also das Produkt nicht vollständig entwickelt werden, so muſs man p^2 und q^3 nur durch Klassenzeichen ausdrücken. (§. 82).

§. 91.

Es ist nicht nothwendig, dafs man um das Produkt der Dignitäten mehrerer Reihen zu erhalten, jedesmal das Gesuchte zuerst durch Localausdrücke bestimmt; es soll daher durch Beispiele noch eine andere Methode angegeben werden.

1. *Beispiel.*

Es soll $p^4 q^2$ entwickelt werden. wobei angenommen wird, dafs $p^4 = (a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)^4$ und $q^2 = (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots)^2$.

* * *

Hier ist für den Zeiger $\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ a, & b. & c, & d, & \ldots = \varrho \end{matrix}\right)$,

$$p^4 = {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\overset{\pi}{D} + {}_{\mathfrak{b}}{}^{5}\overset{\pi}{D}z + {}_{\mathfrak{b}}{}^{6}\overset{\pi}{D}z^2 + {}_{\mathfrak{b}}{}^{7}\overset{\pi}{D}z^3 + {}_{\mathfrak{b}}{}^{8}\overset{\pi}{D}z^4 + \ldots$$

und für den Zeiger $\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \ldots = \pi \end{matrix}\right)$, ist

$$q^2 = {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\varrho}{B} + {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\overset{\varrho}{B}z + {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\overset{\varrho}{B}z^2 + {}_{\mathfrak{b}}{}^{5}\overset{\varrho}{B}z^3 + {}_{\mathfrak{b}}{}^{6}\overset{\varrho}{B}z^4 + \ldots$$

Aus diesem Grunde ist für den Zeiger

$$\left[\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\overset{\pi}{D}, & {}_{\mathfrak{b}}{}^{5}\overset{\pi}{D}, & {}_{\mathfrak{b}}{}^{6}\overset{\pi}{D}, & \ldots = \sigma \\ {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\varrho}{B}, & {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\overset{\varrho}{B}, & {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\overset{\varrho}{B}, & \ldots = \tau \end{matrix}\right]$$

$$p^4 q^2 = {}^{2}\overset{\tau\sigma}{B} + {}^{3}\overset{\tau\sigma}{B}z + {}^{4}\overset{\tau\sigma}{B}z^2 + {}^{5}\overset{\tau\sigma}{B}z^3 + {}^{6}\overset{\tau\sigma}{B}z^4 + {}^{7}\overset{\tau\sigma}{B}z^5 + \ldots$$

Ent-

Entwickelt man dieſen Ausdruck für ſeinen Zeiger, ſo erhält man

$$p^4 q^2 = \overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{2}B}\cdot\overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{4}D} + \left.\begin{matrix} \overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{2}B}\cdot\overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{5}D} \\ \overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{3}B}\cdot\overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{4}D} \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} \overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{2}B}\cdot\overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{6}D} \\ +\overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{3}B}\cdot\overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{5}D} \\ +\overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{4}B}\cdot\overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{4}D} \end{matrix}\right\} z^2 + \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ a, b, c, d, \ldots = \pi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots = \rho \end{pmatrix}$$

2. *Beiſpiel.*

Es ſoll das Produkt $p^4 . q^2 . r^3$ angegeben werden, wobei $r = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \cdots$ geſetzt wird und unter p und q wieder die nämlichen Reihen gedacht werden, welche ſie im erſten Beiſpiele bezeichneten

* * *

Es iſt

$$p^4 = \overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{4}D} + \overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{5}D}z + \overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{6}D}z^2 + \overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{7}D}z^3 + \overset{\pi}{{}_{\mathfrak{d}}^{8}D}z^4 + \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \ldots, \\ a, b, c, d \ldots = \pi \end{pmatrix}$$

$$q^2 = \overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{2}B} + \overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{3}B}z + \overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{4}B}z^2 + \overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{5}B}z^3 + \overset{\rho}{{}_{\mathfrak{b}}^{6}B}z^4 + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots = \rho \end{pmatrix}$$

$$p^3 = \overset{\upsilon}{{}_{\mathfrak{c}}^{3}C} + \overset{\upsilon}{{}_{\mathfrak{c}}^{4}C}z + \overset{\upsilon}{{}_{\mathfrak{c}}^{5}C}z^2 + \overset{\upsilon}{{}_{\mathfrak{c}}^{6}C}z^3 + \overset{\upsilon}{{}_{\mathfrak{c}}^{7}C}z^4 + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots = \upsilon \end{pmatrix}$$

folg-

folglich ist das Produkt

$$p^4q^2r^3 = {}^3\overset{\varphi\tau\sigma}{C} + {}^4\overset{\varphi\tau\sigma}{C}z + {}^5\overset{\varphi\tau\sigma}{C}z^2 + {}^6\overset{\varphi\tau\sigma}{C}z^3 + {}^7\overset{\varphi\tau\sigma}{C}z^4 + \dots$$

$$\left[\begin{array}{l} \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \dots \\ {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\pi}{D},\ {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\overset{\pi}{D},\ {}_{\mathfrak{d}}{}^{6}\overset{\pi}{D},\ {}_{\mathfrak{d}}{}^{7}\overset{\pi}{D}, \dots = \sigma \\ {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\rho}{B},\ {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\overset{\rho}{B},\ {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\overset{\rho}{B},\ {}_{\mathfrak{b}}{}^{5}\overset{\rho}{B}, \dots = \tau \\ {}_{c}{}^{3}\overset{\upsilon}{C},\ {}_{c}{}^{4}\overset{\upsilon}{C},\ {}_{c}{}^{5}\overset{\upsilon}{C},\ {}_{c}{}^{6}\overset{\upsilon}{C}, \dots = \varphi \end{array}\right]$$

$$= {}_{c}{}^{3}\overset{\upsilon}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\rho}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\pi}{D} + \left.\begin{array}{l} {}_{c}{}^{3}\overset{\upsilon}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\rho}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{c}{}^{3}\overset{\upsilon}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\overset{\rho}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{c}{}^{4}\overset{\upsilon}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\rho}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\pi}{D} \end{array}\right] z +$$

$$\left.\begin{array}{l} + {}_{c}{}^{3}\overset{\upsilon}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\rho}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}{}^{6}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{c}{}^{3}\overset{\upsilon}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\overset{\rho}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{c}{}^{3}\overset{\upsilon}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\overset{\rho}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{c}{}^{4}\overset{\upsilon}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\rho}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{c}{}^{4}\overset{\upsilon}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\overset{\rho}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{c}{}^{5}\overset{\upsilon}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\rho}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\pi}{D} \end{array}\right] z^2 + \dots$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\dots \\ a,\ b,\ c,\ d\dots = \pi \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\dots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\dots = \rho \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\dots \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D}\dots = \upsilon \end{array}\right)$$

1. *An-*

1. *Anmerkung. a)*

Um die Produkte $p^4 q^2$ (1. Beiſp.) und $p^4 q^2 r^3$ (2. Beiſp.) vollſtändig zu entwickeln, hat man nur nöthig in dem letzten Ausdrucke der für ein jedes Produkt angegeben iſt, die Klaſſen für die darunter ſtehenden Zeiger zu evolviren.

§. 92.

2. *Aufgabe.*

Es ſoll die Form des Produkts der m Dignitäten p^b, q^c, r^d, s^e u. ſ. w. angegeben werden, unter der Vorausſetzung, daſs eine jede der Reihen p, q, r u. ſ. f. die Form $az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots$ hat.

a) Für Denjenigen der in der Entwickelung ſolcher Klaſſen, als $\overset{..\chi\varphi\tau\sigma}{{}^{n}C}$, nicht ſehr geübt iſt, möchte dieſe Entwickelung, wenn ſie für einen ſolchen Zeiger rein combinatoriſch geſchehn ſollte, deſſen Elemente ſelbſt wieder Klaſſen ſind, mit Schwierigkeiten verbunden ſeyn; er würde ſich alſo genöthigt ſehn, jene Klaſſen erſt in Zahlen anzugeben und hierauf für die Zahlenelemente die dem Zeiger nach damit correſpondirenden Klaſſenzeichen zu ſetzen, folglich die Klaſſen arithmetiſch-combinatoriſch zu evolviren. Einem Ungeübten iſt alſo auf jeden Fall zu rathen von der im 90ten Paragraphe angegebenen Methode Gebrauch zu machen, weil die Evolution der Klaſſen durch Localzeichen eben ſo leicht iſt als die Entwickelung durch Zahlen und weil ein jedes Localzeichen allemal beſtimmt nachweiſet worauf es ſich bezieht. Aus dieſem Grunde iſt überhaupt der Gebrauch der Localzeichen ſehr zu empfehlen, daher auch in der Folge noch häufig die Localformeln vorkommen werden.

Auflösung.

Es ist

$$..s^e r^d q^c p^b = \left(\overset{..\tau\sigma\rho\pi}{{}^{m}\mathfrak{M}} z^0 + \overset{..\tau\sigma\rho\pi}{{}^{m+1}\mathfrak{M}} z^1 + \overset{..\tau\sigma\rho\pi}{{}^{m+2}\mathfrak{M}} z^2 + \overset{..\tau\sigma\rho\pi}{{}^{m+3}\mathfrak{M}} z^3 + \ldots \right) z^{b+c+d+e+\cdots}$$

$$\left[\begin{array}{llllll} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots & \\ p^b\varkappa 1, & p^b\varkappa 2, & p^b\varkappa 3, & p^b\varkappa 4 & \ldots & = \pi \\ q^c\varkappa 1, & q^c\varkappa 2, & q^c\varkappa 3, & q^c\varkappa 4 & \ldots & = \rho \\ r^d\varkappa 1, & r^d\varkappa 2, & r^d\varkappa 3, & r^d\varkappa 4 & \ldots & = \sigma \\ s^e\varkappa 1, & s^e\varkappa 2 & s^e\varkappa 3, & s^e\varkappa 4 & \ldots & = \tau \\ '' & '' & '' & '' & & '' \end{array}\right]$$

Beweis.

Nach §. 83 und §. 85 hat eine jede der Reihen p^b, q^c, r^d, u. s. f. die Form $(Az^0 + Bz^1 + Cz^2 + Dz^3 + ..)z^m$ so dass

$$p^b = (p^b\varkappa 1.z^0 + p^b\varkappa 2.z^1 + p^b\varkappa 3.z^2 + p^b\varkappa 4.z^3 + \ldots)z^b$$
$$q^c = (q^c\varkappa 1.z^0 + q^c\varkappa 2.z^1 + q^c\varkappa 3.z^2 + q^c\varkappa 4.z^3 + \ldots)z^c$$
$$r^d = (r^d\varkappa 1.z^0 + r^d\varkappa 2.z^1 + r^d\varkappa 3.z^2 + r^d\varkappa 4.z^3 + \ldots)z^d$$
$$'' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''$$

Macht man sich also für die Coefficienten dieser Reihen den in der Auflösung angegebenen Zeiger, so erhält man auch wegen §. 90 das in der Auflösung angegebene Produkt.

Zusatz.

Es ist $(..s^e r^d q^c p^b)\varkappa(n+1) = \overset{..\tau\sigma\rho\pi}{{}^{m+n}\mathfrak{M}}$

§. 93.

§. 93.

3. *Aufgabe.*

Es soll im allgemeinen die Form des Produkts folgender m Reihen angegeben werden.

$$p^{\nu} = (Az^{\mu} + Bz^{\mu+\delta} + Cz^{\mu+2\delta} + Dz^{\mu+3\delta} + Ez^{\mu+4\delta} + \ldots)^{\nu}$$
$$q^{n} = (az^{\nu} + bz^{\nu+\delta} + cz^{\nu+2\delta} + dz^{\nu+3\delta} + ez^{\nu+4\delta} + \ldots)^{n}$$
$$r^{l} = \mathfrak{A}z^{\pi} + \mathfrak{B}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{C}z^{\pi+2\delta} + \mathfrak{D}z^{\pi+3\delta} + \mathfrak{E}z^{\pi+4\delta} + \ldots)^{l}$$

" " " " " " "

Auflösung.

Es ist, wenn man $\nu\mu + n\nu + l\pi + \ldots = \Sigma$ setzt,

$$..r^{l}q^{n}p^{\nu} = {}^{m}\overset{..\upsilon\tau\sigma}{\mathcal{M}} z^{\Sigma} + {}^{m+1}\overset{..\upsilon\tau\sigma}{\mathcal{M}} z^{\Sigma+\delta} + {}^{m+2}\overset{..\upsilon\tau\sigma}{\mathcal{M}} z^{\Sigma+2\delta} + {}^{m+3}\overset{..\upsilon\tau\sigma}{\mathcal{M}} z^{\Sigma+3\delta} + \ldots$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ p^{\nu}\varkappa 1, & p^{\nu}\varkappa 2, & p^{\nu}\varkappa 3, & p^{\nu}\varkappa 4, \ldots = \sigma \\ q^{n}\varkappa 1, & q^{n}\varkappa 2, & q^{n}\varkappa 3, & q^{n}\varkappa 4, \ldots = \tau \\ r^{l}\varkappa 1, & r^{l}\varkappa 2, & r^{l}\varkappa 3, & r^{l}\varkappa 4, \ldots = \upsilon \\ '' & '' & '' & '' \quad '' \end{array}\right\}$$

Beweis.

Die m Reihen p^{ν}, q^{n}, r^{l} u. s. w. lassen sich nach §. 86 und 87 so ausdrücken:

$$p^{\nu} = p^{\nu}\varkappa 1.z^{\nu\mu} + p^{\nu}\varkappa 2.z^{\nu\mu+\delta} + p^{\nu}\varkappa 3.z^{\nu\mu+2\delta} + p^{\nu}\varkappa 4.z^{\nu\mu+3\delta} + \ldots$$
$$q^{n} = q^{n}\varkappa 1.z^{n\nu} + q^{n}\varkappa 2.z^{n\nu+\delta} + q^{n}\varkappa 3.z^{n\nu+2\delta} + q^{n}\varkappa 4.z^{n\nu+3\delta} + \ldots$$
$$r^{l} = r^{l}\varkappa 1.z^{l\pi} + r^{l}\varkappa 2.z^{l\pi+\delta} + r^{l}\varkappa 3.z^{l\pi+2\delta} + r^{l}\varkappa 4.z^{l\pi+3\delta} + \ldots$$

" " " " " "

Vergleicht man die Form der Ausdrücke für p^v, q^n, r^l, u. ſ. f. mit den Reihen der Aufgabe des §. 76, ſo fällt ſogleich in die Augen, daſs dieſe Reihen ſo durch ihre Coefficienten und durch die Exponenten, μ, ν, π u. ſ. f. beſtimmt werden als die Ausdrücke für p^v, q^n, r^l u. ſ. w. durch ihren Coefficienten und durch die Exponenten $v\mu$, $n\nu$, $l\pi$ u. ſ. f. beſtimmt ſind. Aus dieſem Grunde kann ſich auch der allgemeine Ausdruck für das Produkt $\ldots r^l q^n p^v$ von dem allgemeinen Ausdrucke für das Produkt der Reihen der Aufgabe des §. 76 nur durch den Zeiger uud auſserdem nur noch dadurch unterſcheiden, daſs bei ihm Σ nicht gleich $\mu + \nu + \pi + \cdots$, ſondern gleich $v\mu + n\nu + l\pi + \cdots$ iſt. Da nun zwiſchen dem allgemeinen Ausdrucke für das Produkt $\ldots r^l q^n p^v$, welchen die Aufſung giebt, und zwiſchen dem allgemeinen Ausdrucke der m Reihen der Aufgabe des §. 76 ſich auch nur der angegebene Unterſchied befindet, ſo iſt einleuchtend daſs das Produkt $\ldots r^l q^n p^v$ durch die Auflöſung richtig beſtimmt iſt.

Zuſatz.

Es iſt $(\ldots r^l q^n p^v)\,7\,(t+1) = {}^{m+t}\overset{\ldots v\tau\sigma}{\mathcal{M}} z^{\Sigma + t\delta}$, alſo

$$(\ldots r^l q^n p^v)\,7\,(t+1)\,\varkappa = {}^{m+t}\overset{\ldots v\tau\sigma}{\mathcal{M}}.$$

Beiſpiel.

Es ſey

$$p^4 = (Az^{\mu} + Bz^{\mu+\delta} + Cz^{\mu+2\delta} + Dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^4$$

$$q^3 = (az^{\nu} + bz^{\nu+\delta} + cz^{\nu+2\delta} + dz^{\nu+3\delta} + \ldots)^3$$

$$r^2 = (\mathfrak{A}z^{\pi} + \mathfrak{B}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{C}z^{\pi+2\delta} + \mathfrak{D}z^{\pi+3\delta} + \ldots)^2;$$

es ſoll das dritte Glied des Produkts $r^2\,q^3\,p^4$ allgemein dargeſtellt werden.

* * *

Hier iſt $l=2$, $n=3$, $v=4$, $t=2$, $m=3$, $\mathcal{M}=\mathcal{C}$, folglich das geſuchte Glied, wenn $4\mu+3\nu+2\pi+2\delta=\Delta$ geſetzt wird,

$$= \overset{\upsilon\tau\sigma}{{}^{5}\mathcal{C}_{z}^{\Delta}} = \left.\begin{matrix} r^2\varkappa1.q^3\varkappa1.p^4\varkappa3 \\ +r^2\varkappa1.q^3\varkappa2.p^4\varkappa2 \\ +r^2\varkappa1.q^3\varkappa3.p^4\varkappa1 \\ +r^2\varkappa2.q^3\varkappa1.p^4\varkappa2 \\ +r^2\varkappa2.q^3\varkappa2.p^4\varkappa1 \\ +r^2\varkappa3.q^3\varkappa1.p^4\varkappa1 \end{matrix}\right\} z^{\Delta}$$

$$\left[\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots & \\ p^4\varkappa1, & p^4\varkappa2, & p^4\varkappa3 \ldots & =\sigma \\ q^3\varkappa1, & q^3\varkappa2, & q^3\varkappa3, \ldots & =\tau \\ r^2\varkappa1, & r^2\varkappa2, & r^2\varkappa3, \ldots & =\upsilon \end{matrix}\right]$$

Es iſt aber

$$p^4 = {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\varphi}{\mathrm{D}}{}_{z}{}^{4\mu} + {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\overset{\varphi}{\mathrm{D}}{}_{z}{}^{4\mu+\delta} + {}_{\mathfrak{d}}{}^{6}\overset{\varphi}{\mathrm{D}}{}_{z}{}^{4\mu+2\delta} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots & \\ A, & B, & C, & D \ldots & =\varphi \end{matrix}\right)$$

$$q^3 = {}_{c}{}^{3}\overset{\chi}{\mathrm{C}}{}_{z}{}^{3\nu} + {}_{c}{}^{4}\overset{\chi}{\mathrm{C}}{}_{z}{}^{3\nu+\delta} + {}_{c}{}^{5}\overset{\chi}{\mathrm{C}}{}_{z}{}^{3\nu+2\delta} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots & \\ a, & b, & c, & d \ldots & =\chi \end{matrix}\right)$$

$$r^2 = {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\psi}{\mathrm{B}}{}_{z}{}^{2\pi} + {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\overset{\psi}{\mathrm{B}}{}_{z}{}^{2\pi+\delta} + {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\overset{\psi}{\mathrm{B}}{}_{z}{}^{2\pi+2\delta} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, \ldots & \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, \ldots & =\psi \end{matrix}\right)$$

daher

daher ist auch

$$r^2 q^3 p^4 = \left.\begin{matrix} {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\psi}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{c}}^{3}\overset{\chi}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{6}\overset{\varphi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\psi}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{c}}^{4}\overset{\chi}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\varphi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\psi}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{c}}^{5}\overset{\chi}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\varphi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\psi}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{c}}^{3}\overset{\chi}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\varphi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\psi}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{c}}^{4}\overset{\chi}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\varphi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\psi}{B} \,.\, {}_{\mathfrak{c}}^{3}\overset{\chi}{C} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\varphi}{D} \end{matrix}\right\} z^{4\mu + 3\nu + 2\pi + 2\delta}$$

§. 94.

4. *Aufgabe.*

Es soll unter der Voraussetzung, dass k, r, v ganze positive Zahlen sind, die Form des Produkts folgender m Reihen angegeben werden:

$$p^k = (az^a + bz^b + cz^c + dz^d + ez^e + fz^f + \ldots)^k$$
$$q^r = (Az^A + Bz^B + Cz^C + Dz^D + Ez^E + Fz^F + \ldots)^r$$
$$s^v = (\mathfrak{a}z^{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}z^{\mathfrak{b}} + \mathfrak{c}z^{\mathfrak{c}} + \mathfrak{d}z^{\mathfrak{d}} + \mathfrak{e}z^{\mathfrak{e}} + \mathfrak{f}z^{\mathfrak{f}} + \ldots)^v$$
$$'' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \qquad ''$$

Es ist

$$\ldots s^v q^r p^k = {}^{m}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} z^{*} + {}^{m+1}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} z^{*} + {}^{m+2}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} z^{*} + {}^{m+3}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} z^{*} + \ldots$$

$$\left[\begin{matrix} 1, & 2, & 3 \ldots & \\ p^k\varkappa 1, & p^k\varkappa 2, & p^k\varkappa 3, & \ldots = \pi \\ q^r\varkappa 1, & q^r\varkappa 2, & q^r\varkappa 3, & \ldots = \rho \\ s^v\varkappa 1, & s^v\varkappa 2, & s^v\varkappa 3, & \ldots = \sigma \\ '' & '' & '' & '' \end{matrix}\right]$$

Be-

Beweis.

Nach §. 88. ist

$$p^k = p^k\varkappa 1.z^* + p^k\varkappa 2.z^* + p^k\varkappa 3.z^* + p^k\varkappa 4.z^* + \ldots,$$
$$q^r = q^r\varkappa 1.z^* + q^r\varkappa 2.z^* + q^r\varkappa 3.z^* + q^r\varkappa 4.z^* + \ldots,$$
$$s^v = s^v\varkappa 1.z^* + s^v\varkappa 2.z^* + s^v\varkappa 3.z^* + s^v\varkappa 4.z^* + \ldots,$$
'' '' '' '' ''

folglich ist auch nach §. 77 die Form des gesuchten Produkts die in der Auflösung angegebene.

Zusatz.

Es ist $(\ldots s^v q^r p^k)\, 7\, (n+1) = {}^{m+n}\overset{\ldots\sigma\rho\pi}{\mathfrak{M}} z^*$, also

$$(\ldots s^v q^r p^k)\, 7\, (n+1)\, \varkappa = {}^{m+n}\overset{\ldots\sigma\rho\pi}{\mathfrak{M}}.$$

Beispiel.

Das vierte Glied folgender drei Reihen zu bestimmen:

$$p^2 = (az^a + bz^b + cz^c + dz^d + ez^e + fz^f + \ldots)^2,$$
$$q^4 = (Az^A + Bz^B + Cz^C + Dz^D + Ez^E + Fz^F + \ldots)^4,$$
$$s^5 = (\mathfrak{A}z^{\mathfrak{a}} + \mathfrak{B}z^{\mathfrak{b}} + \mathfrak{C}z^{\mathfrak{c}} + \mathfrak{D}z^{\mathfrak{d}} + \mathfrak{E}z^{\mathfrak{e}} + \mathfrak{F}z^{\mathfrak{f}} + \ldots)^5,$$

* * *

Das gesuchte Glied ist gleich

$$\overset{\sigma\rho\pi}{{}^{6}C}_{z^*} = \left.\begin{array}{l} s^5\varkappa 1 \,.\, q^4\varkappa 1 \,.\, p^2\varkappa 4 \\ + s^5\varkappa 1 \,.\, q^4\varkappa 2 \,.\, p^2\varkappa 3 \\ + s^5\varkappa 1 \,.\, q^4\varkappa 3 \,.\, p^2\varkappa 2 \\ + s^5\varkappa 1 \,.\, q^4\varkappa 4 \,.\, p^2\varkappa 1 \\ + s^5\varkappa 2 \,.\, q^4\varkappa 1 \,.\, p^2\varkappa 3 \\ + s^5\varkappa 2 \,.\, q^4\varkappa 2 \,.\, p^2\varkappa 2 \\ + s^5\varkappa 2 \,.\, q^4\varkappa 3 \,.\, p^2\varkappa 1 \\ + s^5\varkappa 3 \,.\, q^4\varkappa 1 \,.\, p^2\varkappa 2 \\ + s^5\varkappa 3 \,.\, q^4\varkappa 2 \,.\, p^2\varkappa 1 \\ + s^5\varkappa 4 \,.\, q^4\varkappa 1 \,.\, p^2\varkappa 1 \end{array}\right] z^*$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\quad 2,\quad 3\ .. \\ p^2\varkappa 1, p^2\varkappa 2, p^2\varkappa 3, .. = \pi \\ q^4\varkappa 1, q^4\varkappa 2, q^4\varkappa 3, .. = \rho \\ s^5\varkappa 1, s^5\varkappa 2, s^5\varkappa 3, .. = \sigma \end{array}\right\}$$

Es ist aber (§. 88)

$$p^2 = b\,{}^{2}\overset{\tau}{B}_{z^*} + b\,{}^{3}\overset{\tau}{B}_{z^*} + b\,{}^{4}\overset{\tau}{B}_{z^*} + b\,{}^{5}\overset{\tau}{B}_{z^*} + \ldots\ldots,$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\,.. \\ a,\ b,\ c,\ d\,.. = \tau \end{array}\right)$$

$$q^4 = \mathfrak{d}\,{}^{4}\overset{\upsilon}{D}_{z^*} + \mathfrak{d}\,{}^{5}\overset{\upsilon}{D}_{z^*} + \mathfrak{d}\,{}^{6}\overset{\upsilon}{D}_{z^*} + \mathfrak{d}\,{}^{7}\overset{\upsilon}{D}_{z^*} + \ldots\ldots$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\,.. \\ A, B, C, D\,.. = \upsilon \end{array}\right)$$

$$s^5 = e\,{}^{5}\overset{\varphi}{E}_{z^*} + e\,{}^{6}\overset{\varphi}{E}_{z^*} + e\,{}^{7}\overset{\varphi}{E}_{z^*} + e\,{}^{8}\overset{\varphi}{E}_{z^*} + \ldots\ldots,$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\,.. \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}\,.. = \varphi \end{array}\right)$$

daher

daher ist auch

$$
\left.
\begin{aligned}
s^5 q^4 p^2 74 = {} & {}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\tau}{B} \\
& + {}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\tau}{B} \\
& + {}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{6}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\tau}{B} \\
& + {}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{7}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\tau}{B} \\
& + {}_{e}^{6}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\tau}{B} \\
& + {}_{e}^{6}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\tau}{B} \\
& + {}_{e}^{6}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{6}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\tau}{B} \\
& + {}_{e}^{7}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\tau}{B} \\
& + {}_{e}^{7}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\tau}{B} \\
& + {}_{e}^{8}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\tau}{B}
\end{aligned}
\right] z^*
$$

Anmerkung.

Die vollständige Entwickelung dieses ganzen Ausdrucks ist leicht, wie man aus der Darstellung des Werthes für ${}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \,.\, {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{D} \,.\, {}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\tau}{B} z^*$ deutlich sehn wird:

Es ist nämlich $\;{}_{e}^{5}\overset{\varphi}{\mathrm{E}} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{5}$

$${}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{\mathrm{D}} = \mathrm{A\,A\,A\,A} = \mathrm{A}^{4}$$

$${}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\tau}{\mathrm{B}} = 2ad,\; 2bc$$

folglich $\;{}_{e}^{5}\overset{\varphi}{\mathrm{E}} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{\mathrm{D}} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\tau}{\mathrm{B}} = 2\mathfrak{A}^{5}\mathrm{A}^{4}ad + 2\mathfrak{A}^{5}\mathrm{A}^{4}bc$

also $\;{}_{e}^{5}\overset{\varphi}{\mathrm{E}} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{\mathrm{D}} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\tau}{\mathrm{B}}z^{*} = 2\mathfrak{A}^{5}\mathrm{A}^{4}adz^{5\mathfrak{a}+4A+a+d}$

$$+\; 2\mathfrak{A}^{5}\mathrm{A}^{4}bcz^{5\mathfrak{a}+4A+b+c}$$

§. 95.

5. *Aufgabe.*

Die Form des Produkts $p^{k}q^{r}s^{v}$ unter der Voraussetzung anzugeben, dass unter k, r, v jede ganze und gebrochne, positive und negative Zahl gedacht werden kann. *a*).

Auflösung.

Es ist

$$\ldots s^{v}q^{r}s^{k} = {}^{m}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} + {}^{m+1}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} + {}^{m+2}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} + {}^{m+3}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} + {}^{m+4}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} + \ldots\ldots$$

$$\left[\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & .. & \\ p^{k}7\,1, & p^{k}7\,2, & p^{k}7\,3, & .. & = \pi \\ q^{r}7\,1, & q^{r}7\,2, & q^{r}7\,3, & .. & = \rho \\ s^{v}\;1, & s^{v}\;2, & s^{v}\;3, & .. & = \sigma \end{matrix}\right]$$

" " " "

Be-

a) p, q, s u. s. f. zeigen hier wieder die nämlichen Reihen an, welche sie in der vierten Aufgabe bezeichneten.

Beweis.

Es lassen sich p^k, q^r, s^v u. s. f. folgendermassen ausdrücken:

$$p^k = p^k\urcorner 1 + p^k\urcorner 2 + p^k\urcorner 3 + p^k\urcorner 4 + p^k\urcorner 5 + p^k\urcorner 6 + \ldots\ldots$$
$$q^r = q^r\urcorner 1 + q^r\urcorner 2 + q^r\urcorner 3 + q^r\urcorner 4 + q^r\urcorner 5 + q^r\urcorner 6 + \ldots\ldots$$
$$s^v = s^v\urcorner 1 + s^v\urcorner 2 + s^v\urcorner 3 + s^v\urcorner 4 + s^v\urcorner 5 + s^v\urcorner 6 + \ldots\ldots$$
$$'' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''$$

folglich läſst sich auch wegen §. 71, 2) das Produkt im allgemeinen so angeben wie in der Auflösung geschehen ist.

Zusatz.

$$\text{Es ist } (\ldots s^v q^r p^k)\urcorner(n+1) \quad {}^{m+n}\overset{\cdot\cdot\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}}.$$

Beispiel.

Es soll das dritte Glied des Produkts der beiden Reihen $p^{\frac{1}{2}} = (az^a + bz^b + cz^c + \ldots)^{\frac{1}{2}}$ und $q^{-2} = (Az^A + Bz^B + Cz^C + \ldots)^{-2}$ durch das Localzeichen $\urcorner$ angegeben werden.

* * *

Es ist $q^{-2} p^{\frac{1}{2}}\urcorner 3 =$

$$ {}^4\overset{\rho\pi}{B} \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots & \\ p^{\frac{1}{2}}\urcorner 1, & p^{\frac{1}{2}}\urcorner 2, & p^{\frac{1}{2}}\urcorner 3, & \ldots = \pi \\ q^{-2}\urcorner 1, & q^{-2}\urcorner 2, & q^{-2}\urcorner 3, & \ldots = \rho \end{matrix} \right\} = \begin{aligned} & q^{-2}\urcorner 1 \cdot p^{\frac{1}{2}}\urcorner 3 \\ + & q^{-2}\urcorner 2 \cdot p^{\frac{1}{2}}\urcorner 2 \\ + & q^{-2}\urcorner 3 \cdot p^{\frac{1}{2}}\urcorner 1 \end{aligned} $$

1. *Anmerkung.*

Will man die Localformel in eine solche verwandeln die durch Klassenzeichen ausgedrückt ist, welche sich auf die Coefficienten der gegebenen beiden Reihen beziehn,

ziehn, so muss man von $p^{\frac{1}{2}}$ und q^{-2} nach §. 89 Aufg. 11, Aufl. die ersten drei Glieder entwickeln, und diese in die Localformel für die Ausdrücke substituiren, durch welche sie repräsentirt werden.

2. *Anmerkung.*

Nimmt man die gedachte Substitution für $q^{-2}\,7\,2 \cdot p^{\frac{1}{2}}\,7\,2$ vor, so erhält man

$$ -{}^{2}\mathfrak{A}_{A^{-3}z^{-3A}} \left\{ \begin{array}{l} {}_{a}{}^{1}\overset{\chi}{A}_{z^*} \\ {}_{a}{}^{2}\overset{\chi}{A}_{z^*} \\ {}_{a}{}^{3}\overset{\chi}{A}_{z^*} \\ \quad '' \end{array} \right\} \times {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{a^{\frac{1}{2}-1}z^{(\frac{1}{2}-1)a}} \left\{ \begin{array}{l} {}_{a}{}^{1}\overset{\varphi}{A}_{z^*} \\ {}_{a}{}^{2}\overset{\varphi}{A}_{z^*} \\ {}_{a}{}^{3}\overset{\varphi}{A}_{z^*} \\ \quad '' \end{array} \right\} $$

$$ \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ B,\ C,\ D,\ \ldots = \chi \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ b,\ c,\ d,\ \ldots = \varphi \end{array} \right) $$

Macht man hier für die zwei Klassenreihen die beiden Zeiger

$$ \left(\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ {}_{a}{}^{1}\overset{\chi}{A}, & {}_{a}{}^{2}\overset{\chi}{A}, & {}_{a}{}^{3}\overset{\chi}{A}, & \ldots = \psi \end{array} \right) $$

$$ \left(\begin{array}{llll} 1. & 2, & 3, & \ldots \\ {}_{a}{}^{1}\overset{\varphi}{A}, & {}_{a}{}^{2}\overset{\varphi}{A}, & {}_{a}{}^{3}\overset{\varphi}{A}, & \ldots = \omega \end{array} \right) $$

so läst sich der für $q^{-2}\,7\,2 \cdot p^{\frac{1}{2}}\,7\,2$ angegebene Ausdruck in diesen verwandeln:

$$ \mathfrak{A}\ {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{A^{-3}a^{\frac{1}{2}-1}z^{-3A+(\frac{1}{2}-1)a}} \left({}^{2}\overset{\omega\psi}{B} + {}^{3}\overset{\omega\psi}{B} + {}^{4}\overset{\omega\psi}{B} + \ldots \right) z^*. $$

3. *An-*

3. *Anmerkung.*

Werden die Glieder eines Produkts noch mehrerer als zweier Reihen durch Localformeln angegeben und der ersten Anmerkung gemäſs verwandelt, ſo wird man hierbei auf deſto zuſammengeſetztere Ausdrücke geführt, je gröſser die Anzahl der Reihen iſt, die unter ſich multiplicirt werden und je höher das Glied iſt, welches man ſucht. Die zweite Anmerkung wird aber hinreichend lehren, wie ſich ſolche Ausdrücke auf einfachere, der Form nach, reduciren laſſen,

V. Combinatoriſche Entwickelung der Quotienten mehrerer Reihen.

§. 96.

1. *Aufgabe.*

Den Quotienten $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots}$ in eine Reihe zu verwandeln.

Auflöſung.

Es iſt $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots} =$

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{a\,{}'A}{\alpha^2} + \frac{b\,{}'B}{\alpha^3} - \frac{c\,{}'C}{\alpha^4} + \frac{d\,{}'D}{\alpha^5} - \frac{e\,{}'E}{\alpha^6} + \ldots.$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon\ldots}$$

Beweis.

Es iſt $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots} = (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)^{-1}$, folglich nach §. 81.

$= \alpha^{-1}$

$$= \alpha^{-1} + {}^{-1}\mathfrak{A}\,\alpha^{-2}\,{}_a{}'A + {}^{-1}\mathfrak{B}\,\alpha^{-3}\,{}_b{}'B + {}^{-1}\mathfrak{C}\,\alpha^{-4}\,{}_c{}'C + \ldots$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{{}^{-1}\mathfrak{A}\,{}_a{}'A}{\alpha^2} + \frac{{}^{-1}\mathfrak{B}\,{}_b{}'B}{\alpha^3} + \frac{{}^{-1}\mathfrak{C}\,{}_c{}'C}{\alpha^4} + \ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \ldots}$$

Da nun ${}^{-1}\mathfrak{A} = -1$, ${}^{-1}\mathfrak{B} = 1$, ${}^{-1}\mathfrak{C} = -1$, ${}^{-1}\mathfrak{D} = 1$ u. s. f. ist, so ist klar, daſs aus der zuletzt entwickelten Reihe, sobald darinn für die Binomialcoefficienten die eben angegebenen Werthe gesetzt werden, die in der Auflösung aufgestellte Reihe entsteht und daſs diese also auch die gesuchte ist.

1. *Zusatz.*

$$\left(\frac{1}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}\right) \urcorner (n+1) = \frac{{}_n{}'\mathfrak{N}}{\alpha^{n+1}}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta\ \ldots}$$

2. *Zusatz.*

Wird $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \alpha + q$ gesetzt, so wird in der Gleichung der Auflösung, ${}_a{}'A = q$, ${}_b{}'B = q^2$, ${}_c{}'C = q^3$, u. s. f. und folglich ist

$$\frac{1}{\alpha + q} = \frac{1}{\alpha} - \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} - \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} - \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots$$

Substituirt man hierinn 1 für α, so erhält man

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - \ldots,$$

und denkt man sich in dieser Gleichung unter q die Reihe $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$, so ist sie mit dieser gleichgültig (§. 80).

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta+\gamma+\ldots} = 1 - {}_{a}'A + {}_{b}'B - {}_{c}'C + {}_{d}'D - \ldots\ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots}$$

3. *Zusatz.*

Wird in die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha+q} = \frac{1}{\alpha} - \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} - \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} - \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots,$$

$-q$ ſtatt $+q$ geſetzt, ſo bekömmt man

$$\frac{1}{\alpha-q} = \frac{1}{\alpha} + \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} + \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} + \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots;$$

Denkt man ſich hier unter q die Reihe $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots$ ſo wird

$$\frac{1}{\alpha-\beta-\gamma-\delta-\ldots} = \frac{1}{\alpha} + \frac{{}_{a}'A}{\alpha^2} + \frac{{}_{b}'B}{\alpha^3} + \frac{{}_{c}'C}{\alpha^4} + \ldots\ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \ldots}$$

4. *Zusatz.*

Setzt man in die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha-q} = \frac{1}{\alpha} + \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} + \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} + \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots,$$

1 ſtatt α und läſst q die Reihe $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots$ bedeuten, ſo erhält man (§. 80.).

$$\frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma-\ldots} = 1 + {}_{a}'A + {}_{b}'B + {}_{c}'C + \ldots\ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots}$$

§. 97.

2. *Aufgabe.*

Es wird für $\frac{a+b+c+d+\cdots}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots} = \frac{p}{\alpha+q}$ eine Reihe gesucht.

Auflösung.

Es ist $\frac{p}{\alpha+q} =$

$$
\begin{array}{lllll}
\frac{a}{\alpha} & -\frac{aa\,\overset{\pi}{'A}}{\alpha^2} & +\frac{ab\,\overset{\pi}{'B}}{\alpha^3} & -\frac{ac\,\overset{\pi}{'C}}{\alpha^4} & +\frac{ad\,\overset{\pi}{'D}}{\alpha^5} \quad - \ldots \\
 & +\frac{b}{\alpha} & -\frac{ba\,\overset{\pi}{'A}}{\alpha^2} & +\frac{bb\,\overset{\pi}{'B}}{\alpha^3} & -\frac{bc\,\overset{\pi}{'C}}{\alpha^4} \\
 & & +\frac{c}{\alpha} & -\frac{ca\,\overset{\pi}{'A}}{\alpha^2} & +\frac{cb\,\overset{\pi}{'B}}{\alpha^3} \\
 & & & +\frac{d}{\alpha} & -\frac{da\,\overset{\pi}{'A}}{\alpha^2} \\
 & & & & +\frac{e}{\alpha}
\end{array}
$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \ldots = \pi \end{array}\right)$$

Beweis.

Es ist $\frac{p}{\alpha+q} = p \cdot \frac{1}{\alpha+q}$, also nach der Auflösung der Aufgabe des §. 96.

=

$$=(a+b+c+..).\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{a\,{}'\overset{\pi}{A}}{\alpha^2}+\frac{b\,{}'\overset{\pi}{B}}{\alpha^3}-\frac{c\,{}'\overset{\pi}{C}}{\alpha^4}+\frac{b\,{}'\overset{\pi}{D}}{\alpha^5}-\ldots\right),$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon,\ldots=\pi\end{matrix}\right)$$

folglich nach §. 71, 2)

$$={}^2\overset{\sigma\varrho}{B}+{}^3\overset{\sigma\varrho}{B}+{}^4\overset{\sigma\varrho}{B}+{}^5\overset{\sigma\varrho}{B}+{}^6\overset{\sigma\varrho}{B}+{}^7\overset{\sigma\varrho}{B}+{}^8\overset{\sigma\varrho}{B}+\ldots\ldots$$

$$\left|\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4,\ldots \\ \frac{1}{\alpha}, & -\frac{a\,{}'\overset{\pi}{A}}{\alpha^2}, & +\frac{b\,{}'\overset{\pi}{B}}{\alpha^3}, & -\frac{c\,{}'\overset{\pi}{C}}{\alpha^4}, & \ldots=\varrho \\ a, & b, & c, & d, & \ldots=\sigma\end{matrix}\right|$$

Werden hier nun ${}^2\overset{\sigma\varrho}{B}$, ${}^3\overset{\sigma\varrho}{B}$, ${}^4\overset{\sigma\varrho}{B}$, u. s. w. entwickelt, so entsteht die Reihe der Auflösung, folglich ist diese auch die richtige.

1. Zusatz.

Bezeichnet man das zweite Glied der Reihe p, da a das erste ist, mit $\overset{+1}{a}$, das dritte mit $\overset{+2}{a}$, das vierte mit $\overset{+3}{a}$, u. s. f. das nte mit $\overset{+(n-1)}{a}$, das (n+1)te mit $\overset{+n}{a}$, so wird

$\frac{q}{\alpha+q}\,7\,(n+1)=$

$$\frac{\overset{o'}{a n}\,\overset{o}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n+1}}-\frac{\overset{-1\,'}{b\,n}\,\overset{-1}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n}}+\frac{\overset{-2\,'}{c\,n}\,\overset{-2}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n-1}}-\ldots\mp\frac{\overset{+(n-1)}{a}\,\overset{'}{a}\,A}{\alpha^2}\pm\frac{\overset{+n}{a}}{\alpha}.$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3\ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta\ldots\end{matrix}\right)$$

 2. Zu

2. Zusatz.

Da nach dem 3ten Zusatze des §. 96, $\frac{1}{\alpha-q}$ oder

$$\frac{1}{\alpha-\beta-\gamma-\delta-\ldots}=\frac{1}{\alpha}+\frac{{}_{a}{}'A}{\alpha^2}+\frac{{}_{b}{}'B}{\alpha^3}+\frac{{}_{c}{}'C}{\alpha^4}+\ldots\ldots \text{ ist,}$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots\end{matrix}\right)$$

so ist einleuchtend dass sich die Reihe für p. $\frac{1}{\alpha-q}$ also für $\frac{p}{\alpha-q}$ nur dadurch von der Reihe für $\frac{p}{\alpha+q}$ unterscheiden kann, dass in ihr die Zeichen nicht abwechseln, sondern alle + sind. Es ist folglich $\frac{p}{\alpha+q}\ 7\ (n+1) =$

$$\frac{{}^{0\prime}_{a\,n}\overset{0}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n+1}}+\frac{{}^{-1\prime}_{b\,n}\overset{-1}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n}}+\frac{{}^{-2\prime}_{c\,n}\overset{-2}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n-1}}+\ldots+\frac{\overset{+(n-2)}{a}\;{}_{b}{}'B}{\alpha^3}$$

$$+\frac{\overset{+(n-1)}{a}\;{}_{a}{}'A}{\alpha^2}+\frac{\overset{+n}{a}}{\alpha}.$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots\end{matrix}\right).$$

§. 98.

3. Aufgabe.

Es soll $\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots}$ in eine Reihe evolvirt werden.

Auflösung.

Es ist $\frac{1}{\alpha z^{\nu} + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \dots} =$

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{a^1A}{\alpha} z^{\Delta} - \left.\begin{matrix}\frac{a^2A}{\alpha^2} \\ +\frac{b^2B}{\alpha^3}\end{matrix}\right\} z^{2\Delta} - \left.\begin{matrix}\frac{a^3A}{\alpha^2} \\ +\frac{b^3B}{\alpha^3} \\ -\frac{c^3C}{\alpha^4}\end{matrix}\right\} z^{3\Delta} - \left.\begin{matrix}\frac{a^4A}{\alpha^2} \\ +\frac{b^4B}{\alpha^3} \\ -\frac{c^4C}{\alpha^4} \\ +\frac{b^4D}{\alpha^5}\end{matrix}\right\} z^{4\Delta} - \dots\right) z^{-\nu}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \dots}$$

Beweis.

Es ist

$$\frac{1}{\alpha z^{\nu} + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \dots} = (\alpha z^{\nu} + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \dots)^{-1},$$

alſo nach §. 87.

$$= \left(\alpha^{-1} + {}^{-1}\mathfrak{A}\alpha^{-2}a^1A z^{\Delta} + \left.\begin{matrix}{}^{-1}\mathfrak{A}\alpha^{-2}a^2A \\ +{}^{-1}\mathfrak{B}\alpha^{-3}b^2B\end{matrix}\right\} z^{2\Delta} + \dots\right) z^{-\nu}.$$

Wird dieſer Ausdruck noch weiter fortgeſetzt und werden darinn ſtatt ${}^{-1}\mathfrak{A}, {}^{-1}\mathfrak{B}, {}^{-1}\mathfrak{C}, {}^{-1}\mathfrak{D}$ u. ſ. w. die Werthe -1, $+1$, -1, $+1$ u. ſ. f. ſubſtituirt, ſo entſteht die in der Auflöſung angegebene Reihe, folglich iſt dieſe die geſuchte.

1. *Zusatz.*

$$\left(\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots}\right)^{7(n+1)}=\left(-\frac{{}_{a}{}^{n}A}{\alpha^{2}}+\frac{{}_{b}{}^{n}B}{\alpha^{3}}\right.$$

$$\left.-\frac{{}_{c}{}^{n}C}{\alpha^{4}}+\frac{{}_{d}{}^{n}D}{\alpha^{5}}-\ldots\mp\frac{{}_{n}{}^{n}\mathfrak{N}}{\alpha^{n+1}}\right)z^{n\Delta-\nu}$$

2. *Zusatz.*

Der Inbegriff aller Klassen des $n+1$ten Gliedes läſst ſich durch $i\,{}^{n}J$ ausdrücken und weil in ihm ${}_{a}{}^{n}A$ mit $-\frac{1}{\alpha^{1+1}}$, ${}_{b}{}^{n}B$ mit $+\frac{1}{\alpha^{1+2}}$, ${}_{c}{}^{n}C$ mit $-\frac{1}{\alpha^{1+3}}$, u. ſ. f. multiplicirt iſt, ſo kann man auch ſetzen

$$\left(\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots}\right)^{7(n+1)}=$$

$$\left(\mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i\,{}^{n}J\right)z^{n\Delta-\nu}$$

Der Werth des Zeichens wird hier, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, durch den Exponenten jeder einzelnen Klaſſe der $i\,{}^{n}J$ beſtimmt. Für die erſte Klaſſe nämlich, iſt $* = 1$, für die zweite $= 2$, für die dritte $=$ 3 u. ſ. w. und da wo der Werth des $*$ eine grade Zahl iſt, iſt $\frac{1}{\alpha^{1+*}}$ poſitiv, wo aber dieſer Werth eine ungrade Zahl iſt, iſt $\frac{1}{\alpha^{1+*}}$ negativ.

Drückt man die einzelnen Glieder der Reihe der Auflöſung ſo aus, wie jetzt das $n+1$te ausgedrückt iſt, ſo erhält man $\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots} =$

$$(\frac{1}{\alpha} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i{}^1J_{z^\Delta} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i{}^2J_{z^{2\Delta}} \mp$$

$$\cdot \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i{}^3J_{z^{3\Delta}} \mp \ldots) z^{-\nu}$$

$$= (\frac{1}{\alpha} + ({}_i{}^1J_{z^\Delta} + {}_i{}^2J_{z^{2\Delta}} + {}_i{}^3J_{z^{3\Delta}} +$$

$${}_i{}^4J_{z^{4\Delta}} + \ldots) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}) z^{-\nu}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon, \ldots}$$

3. *Zusatz.*

Da sich ${}_i{}^1J + {}_i{}^2J + {}_i{}^3J + \ldots + {}_i{}^nJ = {}_i{}^n\mathfrak{J}$ setzen läſst wenn man sich unter ${}^n\mathfrak{J}$ nicht bloſs die Combinationen zur Summe n sondern auch die Combinationen zu allen vorhergehenden Summen denkt, wie sie diese auch deutlich vor Augen legt (pag. 93.), und da man ferner in der zuletzt entwickelten Formel ganz deutlich die Relation sieht, welche zwischen dem Exponenten einer Dignität von z, und zwischen dem Summenexponenten der J statt findet, neben welcher die Dignität steht, weil nämlich jedesmal der Exponent der z ein Produkt des Δ durch den Summenexponenten ist, so kann man die letzte Formel für $\frac{1}{\alpha z^\nu + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \ldots}$, wenn sie bis zur n+1ten Klasse entwickelt gedacht wird, auch so ausdrücken:

$$(\frac{1}{\alpha} + ({}_i{}^n\mathfrak{J}_{z^{*\Delta}}) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}) z^{-\nu}.$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon, \ldots}$$

4. Zusatz.

Setzt man $\nu = 1$ und $\Delta = 1$, so giebt der zweite Zusatz

$$\frac{1}{\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + ..} =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + (\overset{1}{i}J_z + \overset{2}{i}J_{z^2} + \overset{3}{i}J_{z^3} + ..) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}\right) z^{-1}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & .. \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & .. \end{matrix}\right)$$

5. Zusatz.

Wird $\nu = 0$ gesetzt, so erhält man durch den zweiten Zusatz.

$$\frac{1}{\alpha + \beta z^{\Delta} + \gamma z^{2\Delta} + ..} =$$

$$\frac{1}{\alpha} + (\overset{1}{i}J_{z^{\Delta}} + \overset{2}{i}J_{z^{2\Delta}} + \overset{3}{i}J_{z^{3\Delta}} + ..) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}$$

Schreibt man hier 1 für Δ, so bekömmt man

$$\frac{1}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + ..} =$$

$$\frac{1}{\alpha} + (\overset{1}{i}J_z + \overset{2}{i}J_{z^2}\ \overset{3}{i}J_{z^3} + ..) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 ... \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon ... \end{matrix}\right)$$

6. Zusatz.

Substituirt man für das α der letzten Formel die Zahl 1, so wird

$$\frac{1}{1+\beta z+\gamma z^2+\ldots} =$$

$$1 + (i\overset{1}{J}z + i\overset{2}{J}z^2 + i\overset{3}{J}z^3 + \ldots) \cdot \mp \frac{1}{1^{1+*}}$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, \ldots\end{matrix}\right)$$

Entwickelt man diese Formel in Klassen, so erhält man *a*).

$$\frac{1}{1+\beta z+\gamma z^2+\ldots} =$$

$$1 - {}_a\overset{1}{A}z - \left.\begin{matrix}{}_a\overset{2}{A} \\ +{}_b\overset{2}{B}\end{matrix}\right\} z^2 - \left.\begin{matrix}{}_a\overset{3}{A} \\ +{}_b\overset{3}{B} \\ -{}_c\overset{3}{C}\end{matrix}\right\} z^3 - \left.\begin{matrix}{}_a\overset{4}{A} \\ +{}_b\overset{4}{B} \\ -{}_c\overset{4}{C} \\ +{}_d\overset{4}{D}\end{matrix}\right\} z^4 \quad \text{u. s. w.}$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, \ldots\end{matrix}\right)$$

Schreibt man hier α, β, γ, δ, u. s. w. statt β, γ, δ, ε, u. s. f. so wird

a) Es ist $\frac{1}{1^{1+*}} = 1$ und zwar positiv oder negativ nachdem * eine grade oder ungrade Zahl ist. Es muss aber jede Klasse der einzelnen J mit $\frac{1}{1^{1+*}}$ multiplicirt werden, und der Werth des * ist der Klassenexponent der Klasse, welche mit $\frac{1}{1^{1+*}}$ multiplicirt werden soll, folglich ist einleuchtend, dass eine Klasse, deren Klassenexponent eine grade Zahl ist, mit $+1$ und eine solche, deren Klassenexponent eine ungrade Zahl ist, mit -1 multiplicirt werden muss.

$$\frac{1}{1+\alpha z+\beta z^2+\ldots}=$$

$$1-{}_a^1A\,z\left.\begin{matrix}-{}_a^2A\\+{}_b^2B\end{matrix}\right\}z^2\left.\begin{matrix}-{}_a^3A\\-{}_b^3B\\+{}_c^3C\end{matrix}\right\}z^3\left.\begin{matrix}-{}_a^4A\\+{}_b^4B\\-{}_c^4C\\+{}_d^4D\end{matrix}\right\}z^4\ \text{u. ſ. w.}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots}$$

7. Zuſatz.

Wird in dem letzten Ausdrucke des 6ten Zuſatzes für $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$ u. ſ. f.; $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ u. ſ. w. ſubſtituirt, ſo werden für dieſe negative α, β, γ, δ, u. ſ. f. die Klaſſen eines ungraden Exponenten ſchon für ſich negativ (weil die Elemente jeder Complexion durch die Multiplication verbunden gedacht werden) und folglich wieder poſitiv, wenn man ihnen das Zeichen — vorſetzt; die Klaſſen eines graden Klaſſenexponenten hingegen bleiben poſitiv. Es iſt alſo

$$\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\ldots}=$$

$$1+{}_a^1A\,z\left.\begin{matrix}+{}_a^2A\\+{}_b^2B\end{matrix}\right\}z^2\left.\begin{matrix}+{}_a^3A\\+{}_b^3B\\+{}_c^3C\end{matrix}\right\}z^3\left.\begin{matrix}+{}_a^4A\\+{}_b^4B\\+{}_c^4C\\+{}_d^4D\end{matrix}\right\}z^4\ \text{u. ſ. w.}$$

$$=1+{}_i^1J\,z+{}_i^2J\,z^2+{}_i^3J\,z^3+{}_i^4J\,z^4+\ldots.$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ldots}$$

Dem dritten Zuſatze nach, kann man alſo auch ſetzen, wenn die Formel die erſten n + 1 Glieder entwickelt darſtellen ſoll,

$$\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\ldots}=1+\overset{n}{i}\mathfrak{z}\,z^{*}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots}$$

Beiſpiel.

Es ſollen die erſten 6 Glieder des $\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\ldots}$ vollſtändig entwickelt werden.

* * *

$$\text{Es iſt } {}^{5}\mathfrak{z} = \begin{array}{l|l|l|l|l}
\alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\
\alpha & \alpha & \alpha & \beta & \\
\alpha & \alpha & \gamma & & \\
\alpha & \beta & \beta & & \\
\alpha & \delta & & & \\
\beta & \gamma & & & \\
\varepsilon & & & &
\end{array}$$

folglich $\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\ldots}$

$$=1+\alpha z+\left.\begin{matrix}\beta\\+\alpha^2\end{matrix}\right\}z^2+\left.\begin{matrix}\gamma\\+2\alpha\beta\\+\alpha^3\end{matrix}\right\}z^3+\left.\begin{matrix}\delta\\+2\alpha\gamma\\+\beta^2\\+3\alpha^2\beta\\+\alpha^4\end{matrix}\right\}z^4+\left.\begin{matrix}\varepsilon\\+2\alpha\delta\\+2\beta\gamma\\+3\alpha^2\gamma\\+3\alpha\beta^2\\+4\alpha^3\beta\\+\alpha^5\end{matrix}\right\}z^5+\ldots$$

§. 99.

4. *Aufgabe.*

$\frac{az^{\mu}+bz^{\mu+\Delta}+cz^{\mu+2\Delta}+\ldots}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots}=\frac{p}{q}$ in eine Reihe aufzu-
löſen.

Auf

Auflösung.

Es ist $\frac{p}{q}$

$$=\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{\alpha}z^{\mu}\end{array}\right. \left.\begin{array}{l}\mp\frac{a}{\alpha^{1+*}}\cdot i\,{}^{1}J\\ +\frac{b}{\alpha}\end{array}\right\} z^{\mu+\Delta} \left.\begin{array}{l}\mp\frac{a}{\alpha^{1+*}}\cdot i\,{}^{2}J\\ \mp\frac{b}{\alpha^{1+*}}\cdot i\,{}^{1}J\\ +\frac{c}{\alpha}\end{array}\right\} z^{\mu+2\Delta}$$

$$\left.\left.\begin{array}{l}\mp\frac{a}{\alpha^{1+*}}\cdot i\,{}^{3}J\\ \mp\frac{b}{\alpha^{1+*}}\cdot i\,{}^{2}J\\ \mp\frac{c}{\alpha^{1+*}}\cdot i\,{}^{1}J\\ +\frac{d}{\alpha}\end{array}\right\} z^{\mu+3\Delta}+\ldots\right\} z^{-\nu} \qquad \left(\begin{array}{l}1,\ 2,\ 3,\ \ldots\\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots\end{array}\right)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{\alpha}z^{\mu}\end{array}\right. \left.\begin{array}{l}-\frac{a\,a\,{}^{1}A}{\alpha^{2}}\\ +\frac{b}{\alpha}\end{array}\right\} z^{\mu+\Delta} \left.\begin{array}{l}-\frac{a\,a\,{}^{2}A}{\alpha^{2}}+\frac{a\,b\,{}^{2}B}{\alpha^{3}}\\ -\frac{b\,a\,{}^{1}A}{\alpha^{2}}\\ +\frac{c}{\alpha}\end{array}\right\} z^{\mu+2\Delta}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{a\,{}^{3}_{a}A}{\alpha^2} + \frac{a\,{}^{3}_{b}B}{\alpha^3} - \frac{a\,{}^{3}_{c}C}{\alpha^4} \\ -\frac{b\,{}^{2}_{a}A}{\alpha^2} + \frac{b\,{}^{2}_{b}B}{\alpha^3} \\ -\frac{c\,{}^{1}_{a}A}{\alpha^2} \\ +\frac{d}{\alpha} \end{array} \Bigg| z^{\mu+3\Delta} - \dots \Bigg\} z^{-\nu} \left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \dots \\ \beta, & \gamma, & \delta \dots \end{matrix}\right)$$

Beweis

Es ist $\frac{p}{q} =$

$$\frac{1}{\alpha z^{\nu} + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \dots} \cdot a z^{\mu} + b z^{\mu+\Delta} + c z^{\mu+2\Delta} + \dots,$$

also gleich dem Produkte der beiden Reihen (§. 98, 2 [illegible]

$$\left(\frac{1}{\alpha} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot i\,{}^{1}J z^{\Delta} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot i\,{}^{2}J z^{2\Delta} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot i\,{}^{3}J z^{3\Delta} \mp \dots\right) z^{-\nu}$$

und $a + b z^{\Delta} + c z^{2\Delta} + d z^{3\Delta} + e z^{4\Delta} + \dots\dots) z^{\mu}$,
und folglich nach §. 75

$$= \left({}^{2}\overset{sr}{B} + {}^{3}\overset{sr}{B} z^{\Delta} + {}^{4}\overset{sr}{B} z^{2\Delta} + {}^{5}\overset{sr}{B} z^{3\Delta} + {}^{6}\overset{sr}{B} z^{4\Delta} + \dots\right) z^{\mu} \cdot z^{-\nu}$$

$$= \left({}^{2}\overset{sr}{B} z^{\mu} + {}^{3}\overset{sr}{B} z^{\mu+\Delta} + {}^{4}\overset{sr}{B} z^{\mu+2\Delta} + {}^{5}\overset{sr}{B} z^{\mu+3\Delta} + \dots\right) z^{-\nu}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, & \dots & \\ \frac{1}{\alpha}, & \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot i\,{}^{1}J, & \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot i\,{}^{2}J, & \mp \dots, & = r \\ a, & b, & c, & \dots & = s \end{array}\right\}$$

Wird nun die letzte Formel für den darunterstehenden Zeiger entwickelt, so entsteht die erste Formel der

Auf

Auflöſung und löſet man in dieſer die J in Klaſſen auf, ſo erhält man die zweite Formel der Auflöſung, folglich ſind beide Formeln der Auflöſung richtig.

1. *Zuſatz.*

Verſteht man wieder, da a der erſte Coefficient der Reihe p iſt, unter $\overset{+1}{a}$ den zweiten, unter $\overset{+2}{a}$ den dritten, unter $\overset{+3}{a}$ den vierten u. ſ. f. unter $\overset{+(n-2)}{a}$ den n—1ten, unter $\overset{+(n-1)}{a}$ den nten und unter $\overset{+n}{a}$ den n+1ten Coefficienten der Reihe p, ſo iſt

$$\frac{p}{q}\,\urcorner(n+1) = \left.\begin{matrix} \mp \dfrac{a}{\alpha^{1+*}} \cdot i\,{}^{n}J \\ \mp \dfrac{b}{\alpha^{1+*}} \cdot i\,{}^{n-1}J \\ \mp \dfrac{c}{\alpha^{1+*}} \cdot i\,{}^{n-2}J \\ \mp \cdots\cdots\cdots \\ \mp \dfrac{\overset{n-2}{a}}{\alpha^{1+*}} \cdot i\,{}^{2}J \\ \mp \dfrac{\overset{n-1}{a}}{\alpha^{1+*}} \cdot i\,{}^{1}J \\ + \dfrac{\overset{n}{a}}{\alpha} \end{matrix}\right|_{z}^{\mu+n\Delta-\nu} \quad \binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots}$$

alſo auch, wenn man $\mu+n\Delta-\nu=\pi$ ſetzt, gleich

$$-\frac{a\,{}^{n}_{a}A}{\alpha^2}+\frac{a\,{}^{n}_{b}B}{\alpha^3}-\frac{a\,{}^{n}_{c}C}{\alpha^4}+\ldots\ldots\mp\frac{a\,n\,{}^{n}\mathfrak{N}}{\alpha^{n+1}}\Bigg|\,z^{\pi}$$

$$-\frac{b\,{}^{n-1}_{a}A}{\alpha^2}+\frac{b\,{}^{n-1}_{b}B}{\alpha^3}-\frac{b\,{}^{n-1}_{c}C}{\alpha^4}+\ldots\mp\frac{\overset{-1}{b\,n}\;{}^{n-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n}}$$

$$-\frac{c\,{}^{n-2}_{a}A}{\alpha^2}+\frac{c\,{}^{n-2}_{b}B}{\alpha^3}-\frac{c\,{}^{n-2}_{c}C}{\alpha^4}+\ldots\mp\frac{\overset{-2}{c\,n}\;{}^{n-2}\overset{-2}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n-1}}$$

$$-\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots$$

$$-\frac{a\,{}^{n-3}_{a}\overset{3}{A}}{\alpha^2}+\frac{a\,{}^{n-3}_{b}\overset{3}{B}}{\alpha^3}-\frac{a\,{}^{n-3}_{c}\overset{3}{C}}{\alpha^4}$$

$$-\frac{a\,{}^{n-2}_{a}\overset{2}{A}}{\alpha^2}+\frac{a\,{}^{n-2}_{b}\overset{2}{B}}{\alpha^3}$$

$$-\frac{a\,{}^{n-1}_{a}\overset{1}{A}}{\alpha^2}$$

$$+\frac{\overset{n}{a}}{\alpha}$$

2, *Zusatz.*

Setzt man $\nu = 1$, $\mu = 1$ und $\Delta = 1$, so giebt die Formel der Auflösung, die Formel für $\dfrac{az + bz^2 + cz^3 + \ldots}{\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \ldots}$.

3. *Zusatz.*

Wird in der Formel der Auflösung, $\nu = 0$ und $\mu = 0$ gesetzt, so entsteht die Formel für $\dfrac{a + bz^{\Delta} + cz^{2\Delta} + \ldots}{\alpha + \beta z^{\Delta} + \gamma z^{2\Delta} + \ldots}$

4. *Zu-*

4. *Zusatz.*

Substituirt man o für ν, o für μ und 1 für Δ, so wird aus der Formel der Auflösung, die Formel für $\dfrac{a+bz+cz^2+\ldots}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\ldots}$

5. *Zusatz.*

Wird o für μ, o für ν, 1 für Δ, und 1 für α gesetzt, so bekömmt man nach der zweiten Formel der Auflösung,

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\ldots}{1+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\ldots} = a \left.\begin{array}{l} -\,a\,\mathfrak{a}^{1}A \\ +\,b \end{array}\right\} z \left.\begin{array}{l} -\,a\,\mathfrak{a}^{2}A + a\,\mathfrak{b}^{2}B \\ -\,b\,\mathfrak{a}^{1}A \\ +\,c \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} -\,a\,\mathfrak{a}^{3}A + a\,\mathfrak{b}^{3}B - a\,\mathfrak{c}^{3}C \\ -\,b\,\mathfrak{a}^{2}A + b\,\mathfrak{b}^{2}B \\ -\,c\,\mathfrak{a}^{1}A \\ +\,d \end{array}\right\} z^3 \text{ u. s. w.}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots \end{array}\right)$$

Setzt man hier α, β, γ, δ, ε, u. s. f. statt β, γ, δ, ε, ζ u. s. w. so wird

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\ldots}{1+\alpha z+\beta z+\gamma z^3+\delta z^4+\ldots} = a \left.\begin{array}{l} -\,a\,\mathfrak{a}^{1}A \\ +\,b \end{array}\right\} z \left.\begin{array}{l} -\,a\,\mathfrak{a}^{2}A + a\,\mathfrak{b}^{2}B \\ -\,b\,\mathfrak{a}^{1}A \\ +\,c \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} -\,a\,\mathfrak{a}^{3}A + a\,\mathfrak{b}^{3}B - a\,\mathfrak{c}^{3}C \\ -\,b\,\mathfrak{a}^{2}A + b\,\mathfrak{b}^{2}B \\ -\,c\,\mathfrak{a}^{1}A \\ +\,d \end{array}\right\} z^3 \text{ u. s. w.}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots \end{array}\right)$$

6. Zu-

6. Zusatz.

Werden in die letzte Formel des 5ten Zusatzes statt der positiven $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$, u. s. f. die negativen $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, u. s. w. substituirt, so werden alle Zeichen der Formel positive (§. 98, 7 Zusatz) und man bekömmt daher

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \dots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \dots} = a + \left.\begin{matrix} a\,\mathfrak{a}^{1}A \\ + b \end{matrix}\right\} z$$

$$+ \left.\begin{matrix} a\,\mathfrak{a}^{2}A + a\,\mathfrak{b}^{2}B \\ + b\,\mathfrak{a}^{1}A \\ + c \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} a\,\mathfrak{a}^{3}A + a\,\mathfrak{b}^{3}B + a\,\mathfrak{c}^{3}C \\ + b\,\mathfrak{a}^{2}A + b\,\mathfrak{b}^{2}B \\ + c\,\mathfrak{a}^{1}A \\ + d \end{matrix}\right\} z^3 \text{ u. s. w.}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3, \dots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma, \dots}$$

$$= a + \left.\begin{matrix} a\,i^{1}J \\ + b \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} a\,i^{2}J \\ + b\,i^{1}J \\ + c \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} a\,i^{3}J \\ + b\,i^{2}J \\ + c\,i^{1}J \\ + d \end{matrix}\right\} z^3 + \text{ u. s. w.}$$

so dass also $\dfrac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \dots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \dots} \urcorner (n+1) =$

$$\left(a\,i^{n}J + b\,i^{n-1}J + c\,i^{n-2}J + d\,i^{n-3}J + \dots + \overset{n-1}{a}\,i^{1}J + \overset{n}{a}\right) z^n \text{ (§. 97. 1. Zus.)}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3, \dots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma, \dots}$$

Beispiel.

Es soll $\dfrac{a + bz + cz^2 + \ldots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \ldots} \, 7\,5$ vollständig entwickelt werden.

* * *

Es ist $\dfrac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \ldots} \, 7\,5 =$

$$\left(a\,{}^4_i J + b\,{}^3_i J + c\,{}^2_i J + d\,{}^1_i J + e\right) z^4$$
$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \ldots \end{matrix}\right)$$

Construirt man hier statt der einzelnen Klasseninvolutionen eine lexicographische zur Summe 4, so erhält man

$$\begin{matrix} {}^4\mathfrak{J} \\ \left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \end{matrix}\right) \end{matrix} = \begin{matrix} \alpha\alpha\alpha\alpha \\ \alpha\alpha\beta \\ \alpha\gamma \\ \beta\beta \\ \delta \end{matrix}$$

folglich ist auch das verlangte Glied gleich

$$\left.\begin{matrix} a\delta + 2a\alpha\gamma + a\beta^2 + 3a\alpha^2\beta + a\alpha^4 \\ + b\gamma + 2b\alpha\beta + b\alpha^3 \\ + c\beta + c\alpha^2 \\ + d\alpha \\ + e \end{matrix}\right\} z^4$$

2. *Beispiel.*

Es wird die vollständige Entwickelung der gebrochnen Function $\dfrac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3}$ verlangt.

* * *

Es

Es ist $\dfrac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3} =$

$$\left.\begin{matrix} a + a.i\,{}^{1}J \\ + b \end{matrix}\right\} z \;\left.\begin{matrix} + a.i\,{}^{2}J \\ + b.i\,{}^{1}J \\ + c \end{matrix}\right\} z^2 \;\left.\begin{matrix} + a.i\,{}^{3}J \\ + b.i\,{}^{2}J \\ + c.i\,{}^{1}J \end{matrix}\right\} z^3 \;\left.\begin{matrix} + a.i\,{}^{4}J \\ + b.i\,{}^{3}J \\ + c.i\,{}^{2}J \end{matrix}\right\} z^4$$

folglich ist auch, da $\overset{*}{\mathfrak{J}}\binom{1,\,2,\,3}{\alpha,\,\beta,\,\gamma} =$

$$\begin{matrix} '' & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ '' & \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \\ '' & \alpha & \alpha & \gamma & & \\ '' & \alpha & \beta & \beta & & \\ '' & \beta & \gamma & & & \\ '' & '' & & & & \end{matrix}$$

$$\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3} =$$

$$\left.\begin{matrix} a + a\alpha \\ + b \end{matrix}\right\} z \;\left.\begin{matrix} + a\beta + a\alpha^2 \\ + b\alpha \\ + c \end{matrix}\right\} z^2 \;\left.\begin{matrix} + a\gamma + 2a\alpha\beta + a\alpha^3 \\ + b\beta + b\alpha^2 \\ + c\alpha \end{matrix}\right\} z^3$$

$$\left.\begin{matrix} + 2a\alpha\gamma + a\beta^2 + 3a\alpha^2\beta + a\alpha^4 \\ + b\gamma + 2b\alpha\beta + b\alpha^3 \\ + c\beta + c\alpha^2 \end{matrix}\right\} z^4 + \ldots\ldots$$

Anmerkung.

In $\mathfrak{J}\binom{1,\,2,\,3}{\alpha,\,\beta,\,\gamma}$ dürfen keine Elemente vorkommen die höher sind als γ; wie leicht diese aber vermieden werden können, wird aus der vorgenommenen Entwickelung der $\overset{*}{\mathfrak{J}}\binom{1,\,2,\,3}{\alpha,\,\beta,\,\gamma}$ deutlich erhellen.

§. 100.

5. *Aufgabe.*

Es soll $\dfrac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \mathfrak{D}z^{\delta} + \ldots} = \dfrac{1}{q}$ in eine Reihe verwandelt werden.

Auflösung.

Es ist $\dfrac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \ldots} =$

$$\mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} + {}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}_{a}{}^{1}A_{z^*} \\ +{}_{a}{}^{2}A_{z^*} \\ +{}_{a}{}^{3}A_{z^*} \\ '' \quad '' \quad '' \end{array}\right. + {}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}_{b}{}^{2}B_{z^*} \\ +{}_{b}{}^{3}B_{z^*} \\ +{}_{b}{}^{4}B_{z^*} \\ '' \quad '' \quad '' \end{array}\right.$$

$$+ {}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{A}^{-4}z^{-4\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}_{c}{}^{3}C + \ldots \\ +{}_{c}{}^{4}C_{z^*} \\ +{}_{c}{}^{5}C_{z^*} \\ '' \quad '' \quad '' \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \\ \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \ldots \end{array}\right)$$

Beweis.

Es ist $\dfrac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \ldots} = (\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \ldots)^{-1}$

Wird hier nun $(\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \ldots)^{-1}$ nach §. 89 entwickelt, so entsteht die in der Auflösung angegebene Reihe, folglich ist diese auch die richtige.

Bei-

Beispiel.

Für $\dfrac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \mathfrak{D}z^{\delta}}$ eine Reihe anzugeben und die Glieder derselben vollständig zu entwickeln.

* * *

Da hier der Nenner begrenzt ist, so wird aus dem obigen Zeiger $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}\ldots\end{matrix}\right)$, der Zeiger $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3 \\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}\end{matrix}\right)$. Für diesen hat die höchste Union die Summe 3, die höchste Binion die Summe 6, die höchste Ternion die Summe 9 u. s. f. Es ist folglich

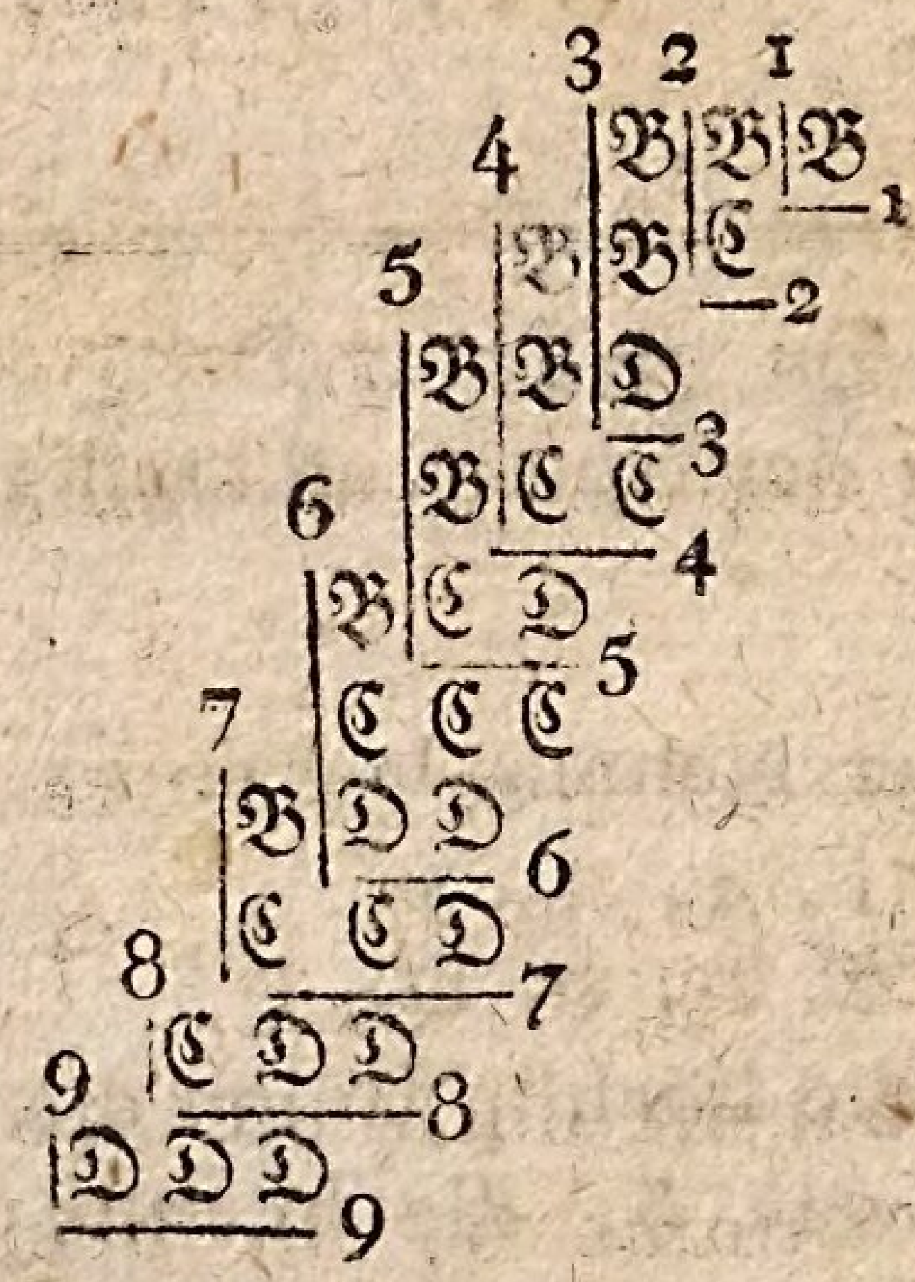
$$\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha}+\mathfrak{B}z^{\beta}+\mathfrak{C}z^{\gamma}+\mathfrak{D}z^{\delta}} = \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} + {}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\left[\begin{array}{l} {}_{\mathfrak{a}}{}^{1}A_{z^*} \\ {}_{\mathfrak{a}}{}^{2}A_{z^*} \\ {}_{\mathfrak{a}}{}^{3}A_{z^*} \end{array}\right.$$

$$+ {}^{-1}\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\left[\begin{array}{l} {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}B_{z^*} \\ +{}_{\mathfrak{b}}{}^{3}B_{z^*} \\ +{}_{\mathfrak{b}}{}^{4}B_{z^*} \\ +{}_{\mathfrak{b}}{}^{5}B_{z^*} \\ +{}_{\mathfrak{b}}{}^{6}B_{z^*} \end{array}\right. \quad {}^{-1}\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}^{-4}z^{-4\alpha}\left[\begin{array}{l} {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}C_{z^*} + \ldots \\ +{}_{\mathfrak{c}}{}^{4}C_{z^*} \\ +{}_{\mathfrak{c}}{}^{5}C_{z^*} \\ +{}_{\mathfrak{c}}{}^{6}C_{z^*} \\ +{}_{\mathfrak{c}}{}^{7}C_{z^*} \\ +{}_{\mathfrak{c}}{}^{8}C_{z^*} \\ +{}_{\mathfrak{c}}{}^{9}C_{z^*} \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3 \\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}\end{matrix}\right)$$

Um die einzelnen Klassen zu entwickeln, bediene man sich folgender abgekürtzten lexicographischen Involution: *a*)

a) Die Regeln für die Construction dieser Involution fallen hier deutlich in die Augen. Sie ist die abgekürzte Involution von welcher in der Anmerkung des §. 89 gesprochen wird.



so wird die gesuchte Reihe diese seyn:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} z^{-\alpha} - \frac{1}{\mathfrak{A}^2}\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B} z^{\beta-2\alpha} \\ + \mathfrak{C} z^{\gamma-2\alpha} \\ + \mathfrak{D} z^{\delta-2\alpha} \end{array} \right. + \frac{1}{\mathfrak{A}^3}\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}^2 z^{2\beta-3\alpha} \\ + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C} z^{\beta+\gamma-3\alpha} \\ + \mathfrak{B}\mathfrak{D} z^{\beta+\delta-3\alpha} + \mathfrak{C}^2 z^{2\gamma-3\alpha} \\ + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D} z^{\gamma+\delta-3\alpha} \\ + \mathfrak{D}^2 z^{2\delta-3\alpha} \end{array} \right.$$

$$- \frac{1}{\mathfrak{A}^4}\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}^3 z^{3\beta-4\alpha} \\ + 3\mathfrak{B}^2\mathfrak{C} z^{2\beta+\gamma-4\alpha} \\ + 3\mathfrak{B}^2\mathfrak{D} z^{2\beta+\delta-4\alpha} + 3\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 z^{\beta+2\gamma-4\alpha} \\ + 6\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} z^{\beta+\gamma+\delta-4\alpha} + \mathfrak{C}^3 z^{3\gamma-4\alpha} \\ + 3\mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 z^{\beta+2\delta-4\alpha} + 3\mathfrak{C}^2\mathfrak{D} z^{2\gamma+\delta-4\alpha} \\ + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 z^{\gamma+2\delta-4\alpha} \\ + \mathfrak{D}^3 z^{3\delta-4\alpha} \end{array} \right. + \ldots\ldots$$

Zu-

Zusatz

Es ist

$$\left(\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha}+\mathfrak{B}z^{\beta}+\mathfrak{C}z^{\gamma}+\ldots}\right)^{(n+1)}$$

$$= {}^{-1}\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{-(n+1)}z^{-(n+1)\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}^{n}_{n}\mathfrak{N}z^{*} \\ +n\,{}^{n+1}\mathfrak{N}z^{*} \\ +n\,{}^{n+2}\mathfrak{N}z^{*} \\ + \quad \text{〃} \end{array}\right.$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D}\ldots}$$

§. 101.

6. *Aufgabe.*

$$\frac{Az^{a}+Bz^{b}+Cz^{c}+Dz^{d}+\ldots}{\mathfrak{A}z^{\alpha}+\mathfrak{B}z^{\beta}+\mathfrak{C}z^{\gamma}+\mathfrak{D}z^{\delta}+\ldots}=\frac{p}{q}$$ in eine Reihe zu evolviren.

Auflösung.

Es ist $\frac{p}{q} = A\mathfrak{A}^{-1}z^{a-\alpha}$

$$-A\mathfrak{A}^{-2}z^{a-\alpha}\left\{\begin{array}{l} a^{1}Az^{*} \\ +a^{2}Az^{*} \\ +a^{3}Az^{*} \\ \text{〃 〃 〃} \end{array}\right. + A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha}\left\{\begin{array}{l} b^{2}Bz^{*} \\ +b^{3}Bz^{*} \\ +b^{4}Bz^{*} \\ \text{〃 〃 〃} \end{array}\right. - \text{u. s. w.}$$

$$+B\mathfrak{A}^{-1}z^{b-\alpha} \qquad -B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha}\left\{\begin{array}{l} a^{1}Az^{*} \\ +a^{2}Az^{*} \\ +a^{3}Az^{*} \\ \text{〃 〃 〃} \end{array}\right. \text{u. s. w.}$$

$$+Ca^{-1}z^{c-\alpha}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E}\ldots}$$

Beweis.

Es ist $\frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q} = p \cdot q^{-1}$, folglich nach §. 95

$$= {}^{2}\overset{\varrho\pi}{\mathfrak{B}} + {}^{3}\overset{\varrho\pi}{\mathfrak{B}} + {}^{4}\overset{\varrho\pi}{\mathfrak{B}} + {}^{5}\overset{\varrho\pi}{\mathfrak{B}} + {}^{6}\overset{\varrho\pi}{\mathfrak{B}} + {}^{7}\overset{\varrho\pi}{\mathfrak{B}} + {}^{8}\overset{\varrho\pi}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ q^{-1}\urcorner 1, & q^{-1}\urcorner 2, & q^{-1}\urcorner 3, & \ldots = \pi \\ p\urcorner 1, & p\urcorner 2, & p\urcorner 3, & \ldots = \varrho \end{matrix}\right\}$$

$$= p\urcorner 1 . q^{-1}\urcorner 1 \Big\} + \left.\begin{matrix} p\urcorner 1 . q^{-1}\urcorner 2 \\ + p\urcorner 2 . q^{-1}\urcorner 1 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} p\urcorner 1 . q^{-1}\urcorner 3 \\ + p\urcorner 2 . q^{-1}\urcorner 2 \\ + p\urcorner 3 . q^{-1}\urcorner 1 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} p\urcorner 1 . q^{-1}\urcorner 4 \\ + p\urcorner 2 . q^{-1}\urcorner 3 \\ + p\urcorner 3 . q^{-1}\urcorner 2 \\ + p\urcorner 4 . q^{-1}\urcorner 1 \end{matrix}\right\} + \ldots$$

Es ist aber nach §. 100 (Aufg. Aufl.), wenn man statt der Binominalcoefficienten sogleich ihre Werthe setzt und $'\mathfrak{A}$ für ${}_{a}{}^{1}A + {}_{a}{}^{2}A + {}_{a}{}^{3}A + \ldots$, und $'\mathfrak{B}$ für ${}_{b}{}^{2}B + {}_{b}{}^{3}B + {}_{b}{}^{4}B + \cdots$ schreibt u. s. w.

$$q^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} - \mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\,'\mathfrak{A}_{z^*} + \mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\,'\mathfrak{B}_{z^*}$$
$$- \mathfrak{A}^{-4}z^{-4\alpha}\,'\mathfrak{C}_{z^*} + \ldots,$$

folglich ist auch pq^{-1}

$$= Az^{a} . \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} - Az^{a} . \mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\,'\mathfrak{A}_{z^*}$$
$$+ Bz^{b} . \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha}$$

$$+ Az^{a} . \mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\,'\mathfrak{B}_{z^*} - ''$$
$$- Bz^{b} . \mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\,'\mathfrak{A}_{z^*} + ''$$
$$+ Cz^{c} . \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} \qquad - ''$$

$$= A\mathfrak{A}^{-1} z^{a-\alpha} - A\mathfrak{A}^{-2} z^{a-2\alpha'} \mathcal{A}_{z^*} + A\mathfrak{A}^{-3} z^{a-3\alpha'} \mathcal{B}_{z^*} - \text{u.}$$
$$+ B\mathfrak{A}^{-1} z^{b-\alpha} \qquad - B\mathfrak{A}^{-2} z^{b-2\alpha'} \mathcal{A}_{z^*} + \text{f.}$$
$$+ C\mathfrak{A}^{-1} z^{c-\alpha} \qquad - \text{w.}$$

Subſtituirt man hierinn für $'\mathcal{A}$ wieder den Werth $_a{}^1A + {}_a{}^2A + {}_a{}^3A + \ldots$; für $'\mathcal{B}$ den Werth $_b{}^1B + {}_b{}^2B + {}_b{}^3B + \ldots\ldots$, ſo entſteht die Formel der Auflöſung.

Zuſatz.

Bezeichnet man hier das n—1te Glied der Reihe p mit $\overset{n-2}{A}$, das nte mit $\overset{n-1}{A}$ und das n+1te mit $\overset{n}{A}$ u. ſ. f. und bezeichnet eben ſo den Exponenten des n—1ten Gliedes der Reihe p mit $\overset{n-2}{a}$, den Exponenten des nten Gliedes mit $\overset{n-1}{a}$ und den Exponenten des n+1ten Gliedes mit $\overset{n}{a}$, ſo iſt

$$\frac{p}{q} \,\rceil\, (n+1)$$

$$= A\mathfrak{A}^{-(n+1)} z^{a-(n+1)\alpha'} \overset{0}{\mathcal{N}}_{z^*} - B\mathfrak{A}^{-n} z^{b-n\alpha'} \overset{-1}{\mathcal{N}}_{z^*} +$$
$$C\mathfrak{A}^{-(n-1)} z^{c-(n-1)\alpha'} \overset{-2}{\mathcal{N}}_{z^*} \,,,,, \mp \overset{n-2}{A}\mathfrak{A}^{-3} z^{\overset{n-2}{a}-3\alpha'} \mathcal{B}_{z^*}$$
$$\pm \overset{n-1}{A}\mathfrak{A}^{-2} z^{\overset{n-1}{a}-2\alpha'} \mathcal{A}_{z^*} \mp \overset{n}{A}\mathfrak{A}^{-1} z^{\overset{n}{a}-\alpha}.$$

Löſet man nun die Variationsklaſſen dieſer Formel in Combinationsklaſſen zu beſtimmten Summen auf, ſo erhält man für das n+1te Glied einen ſolchen Ausdruck als die Auflöſung der 6ten Aufgabe für $\frac{p}{q}$ überhaupt giebt.

Beiſpiel.

Das dritte Glied des $\dfrac{Az^a + Bz^b + Cz^c}{\mathfrak{A}z^\alpha + \mathfrak{B}z^\beta + \mathfrak{C}z^\gamma}$ zu entwickeln.

* * *

Es iſt $\dfrac{Az^a + Bz^b + Cz^c}{\mathfrak{A}z^\alpha + \mathfrak{B}z^\beta + \mathfrak{C}z^\gamma}\urcorner 3 =$

$$A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{b}^2 \mathrm{B} z^* \\ + \mathfrak{b}^3 \mathrm{B} z^* \\ + \mathfrak{b}^4 \mathrm{B} z^* \end{array}\right. - B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{a}^1 \mathrm{A} z^* \\ + \mathfrak{a}^2 \mathrm{A} z^* \end{array}\right. + C\mathfrak{A}^{-1}z^{c-\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{cc} 1, & 2 \\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{C} \end{array}\right)$$

$$= A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}^2 z^{2\beta} \\ + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}z^{\beta+\gamma} \\ + \mathfrak{C}^2 z^{2\gamma} \end{array}\right. - B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}z^\beta \\ + \mathfrak{C}z^\gamma \end{array}\right. + C\mathfrak{A}^{-1}z^{c-\alpha}$$

$$= \frac{A}{\mathfrak{A}^3}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}^2 z^{a+2\beta-3\alpha} \\ + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}z^{a+\beta+\gamma-3\alpha} \\ + \mathfrak{C}^2 z^{a+2\gamma-3\alpha} \end{array}\right. - \frac{B}{\mathfrak{A}^2}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}z^{b+\beta-2\alpha} \\ + \mathfrak{C}z^{b+\gamma-2\alpha} \end{array}\right. + \frac{C}{\mathfrak{A}}z^{c-\alpha}$$

§. 102.

7. *Aufgabe.*

Es ſoll $\dfrac{(Az^\mu + Bz^{\mu+\Delta} + Cz^{\mu+2\Delta} + \ldots)^m}{(\alpha z^\nu + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \ldots)^n} = \dfrac{p^m}{q^n}$ unter der Bedingung entwickelt werden, daſs unter m eine ganze poſitive Zahl gedacht wird.

Auf

Auflösung.

Wenn man $m\mu - \nu = \Sigma$ setzt, so ist $\frac{p^m}{q^n} =$

$$ {}_m^{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}_{\alpha} z^{\Sigma} + \left. \begin{array}{l} {}_m^{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}_a^{1}\overset{\varrho}{A} \\ + {}_m^{m+1}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}_{\alpha-n} \end{array} \right| z^{\Sigma+\Delta} $$

$$ \left. \begin{array}{l} + {}_m^m\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \left\{ \begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}_a^2\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\,{}_b^2\overset{\varrho}{B} \end{array} \right\} \\ + {}_m^{m+1}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\; {}^{-2}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}_a^1\overset{\varrho}{A} \\ + {}_m^{m+2}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}_{\alpha-n} \end{array} \right| z^{\Sigma+2\Delta} \quad \text{u. s. w.} $$

$$ \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ A,\ B,\ C,\ \ldots = \sigma \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots = \varrho \end{array}\right) $$

Beweis.

Es ist $\frac{p^m}{q^n} = p^m \cdot \frac{1}{q^n} = p^m \cdot q^{-n}$, folglich nach §. 95

$$ = {}^2\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^3\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^4\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^5\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^6\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^7\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^8\overset{\upsilon\tau}{B} + \ldots\ldots $$

$$ \left\{ \begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & \ldots. \\ q^{-n}7_1, & q^{-n}7_2, & q^{-n}7_3, & \ldots. = \tau \\ p^m7_1, & p^m7_2, & p^m7_3, & \ldots. = \upsilon \end{array} \right\} $$

=

$$\begin{array}{l} = p^m 7 1 . q^{-n} 7 1 + p^m 7 1 . q^{-n} 7 2 \\ \qquad\qquad\qquad\;\; + p^m 7 2 . q^{-n} 7 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} + p^m 7 1 . q^{-n} 7 3 \\ + p^m 7 2 . q^{-n} 7 2 \\ + p^m 7 3 . q^{-n} 7 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} + p^m 7 1 . q^{-n} 7 4 \\ + p^m 7 2 . q^{-n} 7 3 \\ + p^m 7 3 . q^{-n} 7 2 \\ + p^m 7 4 . q^{-n} 7 1 \end{array} \right\} + \ldots$$

Nach §. 86 ist aber

$$p^m = m\,{}^m\mathfrak{M} z^{m\mu} + m\,{}^{m+1}\mathfrak{M} z^{m\mu+\Delta} + m\,{}^{m+2}\mathfrak{M} z^{m\mu+2\Delta} + \ldots$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\; 2,\; 3,\; 4, \ldots \\ A,\; B,\; C,\; D, \ldots = \sigma \end{array}\right)$$

und nach §. 87 ist

$$q^{-n} = \alpha^{-n} z^{-n\nu}$$

$$+ {}^{-n}\mathfrak{A} \alpha^{-n-1}\, {}_a{}^1 A\, z^{-n\nu+\Delta} + \left. \begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A} \alpha^{-n-1}\, {}_a{}^2 B \\ + {}^{-n}\mathfrak{B} \alpha^{-n-2}\, {}_b{}^2 B \end{array} \right\} z^{-n\nu+2\Delta} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\; 2,\; 3,\; 4, \ldots \\ \beta,\; \gamma,\; \delta,\; \varepsilon, \ldots = \varrho \end{array}\right)$$

Substituirt man nun in die vorhin angegebene Localformel für die Localzeichen diejenigen Glieder dieser beiden Reihen, welche sie repräsentiren, setzt Σ statt $m\mu - n\nu$ und ordnet den dadurch erhaltenen Ausdruck gehörig, so bekömmt man die Formel der Auflösung.

1. Zusatz. a)

Es ist $\frac{p^m}{q^n}\, 7p+1 =$

$$\left[{}_m{}^m\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \left| \begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\ {}_a{}^pA \\ +{}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\ {}_b{}^pB \\ +{}^{-n}\mathfrak{C}_{\alpha-n-3}\ {}_c{}^pC \\ +\ \ ''\ \ ''\ \ ''\ \ '' \\ +{}^{-n}\overset{0}{\mathfrak{P}}_{\alpha-n-p}\ {}_p^{0}{}^p\overset{0}{P} \end{matrix} \right| + {}_m{}^{m+1}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \left| \begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\ {}_a{}^{p-1}A \\ +{}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\ {}_b{}^{p-1}B \\ +{}^{-n}\mathfrak{C}_{\alpha-n-3}\ {}_c{}^{p-1}C \\ +\ \ ''\ \ ''\ \ ''\ \ '' \\ +{}^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{P}}_{\alpha-n-(p-1)}\ {}_p^{-1}{}^{p-1}\overset{-1}{P} \end{matrix} \right| + \ldots \right.$$

$$+ {}_m{}^{m+(p-2)}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \left| \begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\ {}_a{}^2A \\ +{}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\ {}_b{}^2B \end{matrix} \right| + {}_m{}^{m+(p-1)}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\ {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\ {}_a{}^1A$$

$$\left. + {}_m{}^{m+p}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}_{\alpha-n} \right\} z^{\Sigma+p\Delta}$$

$$\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C},\ \ldots = \sigma\right) \qquad \left(\overset{1}{\beta},\ \overset{2}{\gamma},\ \overset{3}{\delta},\ \ldots\right)$$

2. Zusatz.

Wird $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\Delta = 1$ und $\alpha = 1$ gesetzt, so erhält man

$$\frac{(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots)^m}{(1 + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots)^n} =$$

$$ {}_m{}^m\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} + \left. \begin{matrix} {}_m{}^m\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}.\ {}^{-n}\mathfrak{A}_a\ {}^1\overset{\varrho}{A} \\ + {}_m{}^{m+1}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \end{matrix} \right\} z +$$

+

a) $\overset{0}{P}$ bedeutet hier die pte also $\overset{-1}{P}$ die p−1te Klasse.

$$+\ {}^{m}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\left[\begin{array}{l} -{}^{n}\mathfrak{A}_{a}\,{}^{2}\overset{\varrho}{A} \\ {}^{-}_{+}{}^{n}\mathfrak{B}_{b}\,{}^{2}\overset{\varrho}{B} \end{array}\right] z^{2}+\ldots$$

$$+\ {}^{m+1}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\,.\,-{}^{n}\mathfrak{A}_{a}\,{}^{1}\overset{\varrho}{A}$$

$$+\ {}^{m+2}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}$$

$$\left(\begin{array}{l}1,2,3,\ldots \\ A,B,C,\ldots=\sigma\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}1,2,3,\ldots \\ \beta,\gamma,\delta,\ldots=\varrho\end{array}\right)$$

3. *Zusatz.*

Setzt man im zweiten Zusatze $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, u. s. f. statt $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$, u. s. w, so werden die Klassen eines ungraden Klassenexponenten, welche sich auf ϱ beziehn, negativ und folglich ist

$$\frac{(A+Bz+Cz^{2}+Dz^{3}+\ldots)^{m}}{(1-\alpha z-\beta z^{2}-\delta z^{3}-\ldots)^{n}}=$$

$${}^{m}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}+{}^{m}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\,.\,-{}^{n}\mathfrak{A}_{a}\,{}^{1}\overset{\varrho}{A}\ \Big|\ z\ +$$

$$+\ {}^{m+1}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}$$

$${}^{m}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\left[\begin{array}{l} -{}^{n}\mathfrak{A}_{a}\,{}^{2}\overset{\varrho}{A} \\ {}^{-}_{+}{}^{n}\mathfrak{B}_{b}\,{}^{2}\overset{\varrho}{B} \end{array}\right] z^{2}+\ldots$$

$$+\ {}^{m+1}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\,.\,-{}^{n}\mathfrak{A}_{a}\,{}^{1}\overset{\varrho}{A}$$

$$+\ {}^{m+2}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}$$

$$\left(\begin{array}{l}1,2,3,\ldots \\ A,B,C,\ldots=\sigma\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}1,2,3,\ldots \\ \alpha,\beta,\gamma,\ldots=\varrho\end{array}\right)$$

4. Zu-

4. Zusatz.

Substituirt man im 3ten Zusatze 1 für m, so wird $\mathfrak{M} = A$ und folglich ist

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots}{(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \ldots)^n} =$$

$$ {}_a^1\overset{\sigma}{A} + \left.\begin{matrix} {}_a^1\overset{\sigma}{A} . {}^{-n}\mathfrak{A}_a{}^1\overset{\varrho}{A} \\ + {}_a^2\overset{\sigma}{A} \end{matrix}\right\} z + $$

$$ \left.\begin{matrix} {}_a^1\overset{\sigma}{A} \left\{\begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{A}_a{}^2\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_b{}^2\overset{\varrho}{B} \end{matrix}\right. \\ + {}_a^2\overset{\sigma}{A} \;.\; {}^{-n}\mathfrak{A}_a{}^1\overset{\varrho}{A} \\ + {}_a^3\overset{\sigma}{A} \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} {}_a^1\overset{\sigma}{A} \left\{\begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{A}_a{}^3\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_b{}^3\overset{\varrho}{B} \\ - {}^{-n}\mathfrak{C}_c{}^3\overset{\varrho}{C} \end{matrix}\right. \\ + {}_a^2\overset{\sigma}{A} \left\{\begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{A}_a{}^2\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_b{}^2\overset{\varrho}{B} \end{matrix}\right. \\ + {}_a^3\overset{\sigma}{A} \;.\; {}^{-n}\mathfrak{A}_a{}^1\overset{\varrho}{A} \\ + {}_a^4\overset{\sigma}{A} \end{matrix}\right\} z^3 + \ldots $$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ A, & B, & C, & \ldots = \sigma \end{matrix}\right) \quad \left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots = \varrho \end{matrix}\right)$$

Bei-

Beiſpiel.

Die erſten vier Glieder der Reihe für $\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots}{(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \ldots)^3}$ vollſtändig zu entwickeln.

* * *

Die lexicographiſche Involution $\begin{array}{l} \alpha|\alpha|\alpha \\ \alpha|\beta \\ \gamma \end{array}$ begreift alle hier nöthige Klaſſen für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \end{pmatrix}$ in ſich.

Es iſt daher

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots}{(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \ldots)^3} = A + \left.\begin{array}{l} 3A\alpha \\ +B \end{array}\right\} z + \left.\begin{array}{l} 3A\beta \\ +6A\alpha^2 \\ +3B\alpha \\ +C \end{array}\right\} z^2 + \left.\begin{array}{l} 3A\gamma \\ +6A\alpha\beta \\ +10A\alpha^3 \\ +3B\beta \\ +6B\alpha^2 \\ +3C\alpha \\ +D \end{array}\right\} z^3 + .$$

5. *Zuſatz.*

Werden im vierten Zuſatze die Coefficienten β, γ, δ, u. ſ. f. gleich Null geſetzt, ſo wird

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots}{(1 - \alpha z)^n} = {}_a{}^1\overset{\sigma}{A} - \left.\begin{array}{l} {}_a{}^1\overset{\sigma}{A} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}_a{}^1\overset{\varrho}{A} \\ + {}_a{}^2\overset{\sigma}{A} \end{array}\right\} z$$

+

$$\left.\begin{array}{l} +{}_a{}^1\overset{\sigma}{A}\cdot{}^{--n}\mathfrak{B}_b{}^2\overset{\varrho}{B} \\ -{}_a{}^2\overset{\sigma}{A}\cdot{}^{--n}\mathfrak{A}_a{}^1\overset{\varrho}{A} \\ +{}_a{}^3\overset{\sigma}{A} \end{array}\right| z^2 \left.\begin{array}{l} -{}_a{}^1\overset{\sigma}{A}\cdot{}^{--n}\mathfrak{C}_c{}^3\overset{\varrho}{C} \\ +{}_a{}^2\overset{\sigma}{A}\cdot{}^{--n}\mathfrak{B}_b{}^2\overset{\varrho}{B} \\ -{}_a{}^3\overset{\sigma}{A}\cdot{}^{--n}\mathfrak{A}_a{}^1\overset{\varrho}{A} \\ +{}_a{}^4\overset{\sigma}{A} \end{array}\right| z^3 + \ldots \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{l} 1,2,3\ldots \\ A,B,C\ldots=\sigma \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{l} 1 \\ \alpha=\varrho \end{array}\right) \end{array}$$

Beispiel.

Es soll $\dfrac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots}{(1-\alpha z)^4}$ vollständig entwickelt werden.

* * *

Es ist $\dfrac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots}{(1-\alpha z)^4} =$

$$\left.\begin{array}{l} A+4A\alpha \\ +B \end{array}\right\} z \left.\begin{array}{l} +10A\alpha^2 \\ +4B\alpha \\ +C \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} +20A\alpha^3 \\ +10B\alpha^2 \\ +4C\alpha \\ +D \end{array}\right\} z^3 \left.\begin{array}{l} +35A\alpha^4 \\ +20B\alpha^3 \\ +10C\alpha^2 \\ +4D\alpha \\ +E \end{array}\right\} z^4 + \ldots$$

6. Zusatz.

Es ist $\dfrac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots}{(1-\alpha z)^n}\, 7\,(m+1) =$

$$(\mp {}_a^1\overset{\sigma}{A}. ^{-n}\overset{0}{\mathfrak{M}}\, {}_m^m\overset{0}{\mathcal{M}} \mp {}_a^2\overset{\sigma}{A}. ^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}{}_m^{-1}\, {}^{m-1}\overset{-1}{\mathcal{M}} \mp$$

$${}_a^3\overset{\sigma}{A}. ^{-n}\overset{-2}{\mathfrak{M}}{}_m^{-2}\, {}^{m-2}\overset{-2}{\mathcal{M}} + \,''\,'' - {}_a^{m-2}\overset{\sigma}{A}. ^{-n}\mathfrak{C}_c\, {}^3C +$$

$${}_a^{m-1}\overset{\sigma}{A}. ^{-n}\mathfrak{B}_b\, {}^2B - {}_a^m\overset{\sigma}{A}. ^{-n}\mathfrak{A}_a\, {}^1_aA + {}_a^{m+1}\overset{\sigma}{A})z^m$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{A,\ B,\ C\ldots = \sigma} \quad \binom{1}{\alpha}$$

$$=(\mp {}_a^1 A. ^{-n}\overset{0}{\mathfrak{M}}\alpha^m \mp {}_a^2 A. ^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-1} \mp {}_a^3 A. ^{-n}\overset{-2}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-2}$$

$$\mp \,''\,'' - {}_a^{m-2}A. ^{-n}\mathfrak{C}\alpha^3 + {}_a^{n-1}A. ^{-n}\mathfrak{B}\alpha^2 - {}_a^m A. ^{-n}\mathfrak{A}\alpha$$

$$+ {}_a^{m+1}A)z^m$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{A,\ B,\ C,\ \ldots}$$

Soll der Zähler der gebrochnen Zahl mit dem nten Gliede, also mit $\overset{n-1}{A}z^{n-1}$ abbrechen, so bricht das m+1te Glied der Reihe dieser gebrochnen Zahl mit dem Theile ab, in welchem ${}_a^1 A$ vorkömmt. Es ist folglich

$$\frac{A + \mathfrak{B}z + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ \overset{n-1}{A}z^{n-1}}{(1-\alpha z)^n} \urcorner (m+1) =$$

$$(\mp {}_a^1 A. ^{-n}\overset{0}{\mathfrak{M}}\alpha^m \mp {}_a^2 A. ^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-1} \mp {}_a^3 A. ^{-n}\overset{-2}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-2} \mp \,''$$

$$'' \mp {}_a^n A. ^{-n}\overset{-(n-1)}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-(n-1)})z^m$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n}{A,\ B,\ C\ \ldots\ \overset{n-1}{A}}$$

An-

Anmerkung.

In beiden Formeln für das $m+1$te Glied wird aus $\mp$ das Zeichen $+$ wo der Exponent der α eine grade Zahl ist, hingegen wo der Exponent der α eine ungrade Zahl ist, wird aus $\mp$ das Zeichen $-$.

Beispiel.

Es soll $\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3}{(1-\alpha z)^4}$ 7 6 vollständig entwickelt werden.

* * *

Da hier ${}^{n}A = {}^{4}A$, so ist nach der letzten Formel das gesuchte Glied gleich

$$\left(-{}_{a}^{1}A.^{-4}\mathfrak{E}\alpha^5 + {}_{a}^{2}A.^{-4}\mathfrak{D}\alpha^4 - {}_{a}^{3}A.^{-4}\mathfrak{C}\alpha^3 + {}_{a}^{4}A.^{-4}\mathfrak{B}\alpha^2\right)z^5$$

$$= (56A\alpha^5 + 35B\alpha^4 + 20C\alpha^3 + 10D\alpha^2)z^5$$

VI. Umkehrung der Reihen.

Rückkehrende Formeln. a)

§. 103.

1. *Aufgabe.*

Es wird die Gleichung gegeben

$$z = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + dx^{\varrho+3\delta} + \ldots\ldots\ldots,$$

es soll x^{σ} durch eine fortlaufende Reihe ausgedrückt werden, welche nach den Potenzen der z fortläuft.

a) Unter Rückkehrenden Formeln werden solche verstanden, bei welchen allemal ein Glied durch alle vorhergehende bestimmt wird.

Auflösung.

Bezeichnet man die Reihe $ax^{\varrho}+bx^{\varrho+\delta}+cx^{\varrho+2\delta}+\ldots$ mit p und setzt $x^{\sigma}=\dot{\mathfrak{A}}z^{\frac{\sigma}{\varrho}}+\dot{\mathfrak{B}}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}+\dot{\mathfrak{C}}z^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}+\dot{\mathfrak{D}}z^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}+\ldots$, und bestimmt die angenommenen Coefficienten dieser Reihe durch Localzeichen, welche sich auf die Coefficienten der $\frac{\sigma}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+\delta}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}$ten Dignität der Reihe p beziehn, so ist

$$x^{\sigma}\urcorner 1=\frac{1}{p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k1}z^{\frac{\sigma}{\varrho}},\quad x^{\sigma}\urcorner 2=-\frac{\left(\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k2\right)}{p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k1}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}},$$

$$x^{\sigma}\urcorner 3=-\frac{\left(\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k3+\dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k2\right)}{p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}k1}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}},$$

$$x^{\sigma}\urcorner 4=-\frac{\left(\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k4+\dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k3+\dot{\mathfrak{C}}p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}k2\right)}{p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}k1}z^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}$$

a) Scale p(a, b, c, d, ...)

u. s. w. u. s. w. u. s. w.

Be-

a) Die Scale ist hier p(a, b, c, d, ...), weil die Coefficienten der höhern Dignitäten der Reihe p durch die Coefficienten der p bestimmt werden.

Beweis.

Es ist nach §. 87

$$\overset{\sigma}{\overline{p}}{}^{\rho} = \overset{\sigma}{\overline{p}}{}^{\rho} k1.x^{\sigma} + \overset{\sigma}{\overline{p}}{}^{\rho} k2.x^{\sigma+\delta} + \overset{\sigma}{\overline{p}}{}^{\rho} k3.x^{\sigma+2\delta} + \ldots$$

$$\overset{\sigma+\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} = \overset{\sigma+\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k1.x^{\sigma+\delta} + \overset{\sigma+\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k2.x^{\sigma+2\delta} + \overset{\sigma+\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k3.x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$\overset{\sigma+2\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} = \overset{\sigma+2\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k1.x^{\sigma+2\delta} + \overset{\sigma+2\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k2.x^{\sigma+3\delta} + \overset{\sigma+2\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k3.x^{\sigma+4\delta} + \ldots$$

$$\overset{\sigma+3\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} = \overset{\sigma+3\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k1.x^{\sigma+3\delta} + \overset{\sigma+3\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k2.x^{\sigma+4\delta} + \overset{\sigma+3\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k3.x^{\sigma+5\delta} + \ldots$$

" " " "

Werden diese Reihen der $\overset{\sigma}{\overline{p}}{}^{\rho}$, $\overset{\sigma+\delta}{\overline{p}}{}^{\rho}$, $\overset{\sigma+2\delta}{\overline{p}}{}^{\rho}$ u. s. f. statt $\overset{\sigma}{\overline{z}}{}^{\rho}$, $\overset{\sigma+\delta}{\overline{z}}{}^{\rho}$, $\overset{\sigma+2\delta}{\overline{z}}{}^{\rho}$, u. s. w. in die für x^{σ} angenommene Reihe $x^{\sigma} = \dot{\mathfrak{A}}\overset{\sigma}{\overline{z}}{}^{\rho} + \dot{\mathfrak{B}}\overset{\sigma+\delta}{\overline{z}}{}^{\rho} + \dot{\mathfrak{C}}\overset{\sigma+2\delta}{\overline{z}}{}^{\rho} + \ldots$ gesetzt, so erhält man

$$x^{\sigma} = \dot{\mathfrak{A}}\overset{\sigma}{\overline{p}}{}^{\rho} k1.x^{\sigma} + \dot{\mathfrak{A}}\overset{\sigma}{\overline{p}}{}^{\rho} k2.x^{\sigma+\delta} + \dot{\mathfrak{A}}\overset{\sigma}{\overline{p}}{}^{\rho} k3.x^{\sigma+2\delta}$$

$$+ \dot{\mathfrak{B}}\overset{\sigma+\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k1.x^{\sigma+\delta} + \dot{\mathfrak{B}}\overset{\sigma+\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k2.x^{\sigma+2\delta}$$

$$+ \dot{\mathfrak{C}}\overset{\sigma+2\delta}{\overline{p}}{}^{\rho} k1.x^{\sigma+2\delta}$$

$$+ \dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k4.x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$+ \dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k3.x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$+ \dot{\mathfrak{C}}p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k2.x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$+ \dot{\mathfrak{D}}p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}} k1.x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

Bringt man hier x^{σ} auf die andere Seite, reducirt alſo die Gleichung auf Null, ſo wird

$$\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k1 - 1 = 0,$$

$$\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k2 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k1 = 0,$$

$$\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k3 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k2 + \dot{\mathfrak{C}}p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k1 = 0$$

$$\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k4 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k3 + \dot{\mathfrak{C}}p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k2 + \dot{\mathfrak{D}}p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}} k1 = 0$$

u. ſ. w. u. ſ. w. u. ſ. w.

folglich iſt

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k1}, \quad \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k2}{p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k1},$$

$$\dot{\mathfrak{C}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k3 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k2}{p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}k1},$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k4 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k3 + \dot{\mathfrak{C}}p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}k2}{p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}k1},$$

u. ſ. w u. ſ. w. u. ſ. w.

Subſtituirt man nun dieſe Werthe der $\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{B}}, \dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. f. in die Gleichung $x^\sigma = \dot{\mathfrak{A}}z^{\frac{\sigma}{\varrho}} + \dot{\mathfrak{B}}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} + \dot{\mathfrak{C}}z^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} + \ldots.$ ſo bekömmt man die in der Auflöſung angegebenen Glieder.

Zuſatz

Wird ϱ gleich 1 und δ gleich 1 angenommen, ſo wird aus der Gleichung der Aufgabe die Gleichung $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$. und

$$x^\sigma = \frac{1}{p^\sigma k1} z^\sigma - \frac{(\dot{\mathfrak{A}}p^\sigma k2)}{p^{\sigma+1}k1} z^{\sigma+1} - \frac{(\dot{\mathfrak{A}}p^\sigma k3 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\sigma+1}k2)}{p^{\sigma+2}k1} z^{\sigma+2}$$

$$- \frac{(\dot{\mathfrak{A}}p^\sigma k4 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\sigma+1}k3 + \dot{\mathfrak{C}}p^{\sigma+2}k2)}{p^{\sigma+3}k1} z^{\sigma+3} - \ldots$$ a)

 Bei-

a) Der erſte Coefficient dieſer Reihe iſt alſo wieder $\dot{\mathfrak{A}}$, der zweite iſt $\dot{\mathfrak{B}}$, der dritte iſt $\dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. w.

1. Beispiel.

Es sey $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$, es soll x^3 durch z bestimmt werden.

* * *

Es ist, da hier $\sigma = 3$,

$$x^3 = \frac{1}{p^3\,k1} z^3 - \frac{(\dot{\mathfrak{A}} p^3\,k2)}{p^4\,k1} z^4 - \frac{(\dot{\mathfrak{A}} p^3\,k3 + \dot{\mathfrak{B}} p^4\,k2)}{p^5\,k1} z^5 -$$
$$- \frac{(\dot{\mathfrak{A}} p^3\,k4 + \dot{\mathfrak{B}} p^4\,k3 + \dot{\mathfrak{C}} p^5\,k2)}{p^6\,k1} \cdot z^6 - \text{u. s. w.}$$

Nach §. 68. Zusatz ist aber

$$p^3k1 = {}_c{}^3C,\ p^3k2 = {}_c{}^4C,\ p^3k3 = {}_c{}^5C,\ p^3k4 = {}_c{}^6C,$$
$$p^4k1 = {}_\mathfrak{d}{}^4D,\ p^4k2 = {}_\mathfrak{d}{}^5D,\ p^4k3 = {}_\mathfrak{d}{}^6D,\ p^5k1 = {}_e{}^5E,$$
$$p^5k2 = {}_e{}^6E,\ p^6k1 = {}_f{}^6F, \text{ u. s. w.}$$
$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\\ a, & b, & c, & d, & \ldots\end{pmatrix}$$

folglich ist auch

$$x^3 = \frac{1}{{}_e{}^3C} z^3 - \frac{\dot{\mathfrak{A}}\,{}_c{}^4C}{{}_\mathfrak{d}{}^4D} z^4 - \frac{\dot{\mathfrak{A}}\,{}_c{}^5C + \dot{\mathfrak{B}}\,{}_\mathfrak{d}{}^5D}{{}_e{}^5E} z^5 -$$
$$- \frac{\dot{\mathfrak{A}}\,{}_c{}^6C + \dot{\mathfrak{B}}\,{}_\mathfrak{d}{}^6D + \dot{\mathfrak{C}}\,{}_e{}^6E}{{}_f{}^6F} z^6 - \text{u. s. w.}$$
$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4 \ldots\\ a, & b, & c, & d \ldots\end{pmatrix}$$

Sollen in der eben entwickelten Reihe die Factoren $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. s. w. durch Klassenzeichen für den Zeiger $\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & \ldots\\ a, & b, & c, & \ldots\end{pmatrix}$ bestimmt werden, so kann dies leicht geschehn,

ſchehn, weil $\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{{}_{\mathfrak{c}}^{3}C}$ iſt. Subſtituirt man nämlich dieſen Werth des $\dot{\mathfrak{A}}$, für $\dot{\mathfrak{A}}$ in den Coefficienten des zweiten Gliedes, ſo hat man auch den zweiten Coefficienten, alſo $\dot{\mathfrak{B}}$ beſtimmt; ſetzt man daher dieſen Werth des $\dot{\mathfrak{B}}$ und den vorher angegebenen des $\dot{\mathfrak{A}}$ wieder ſtatt $\dot{\mathfrak{B}}$ und $\dot{\mathfrak{A}}$ in den Coefficienten des dritten Gliedes, ſo iſt auch dieſer, folglich $\dot{\mathfrak{C}}$ beſtimmt. u. ſ. w.

2. *Beiſpiel.*

Es ſoll unter der Bedingung, daſs $z = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$, x durch z beſtimmt werden.

* * *

Die hierhergehörige Formel erhält man, wenn in der Formel des Zuſatzes $\sigma = 1$ geſetzt wird. Es iſt alſo

$$x = \frac{1}{p^1k1} \cdot z - \frac{\dot{\mathfrak{A}}p^1k2}{p^2k1} \cdot z^2 - \frac{\dot{\mathfrak{A}}p^1k3 + \dot{\mathfrak{B}}p^2k2}{p^3k1} \cdot z^3$$

$$- \frac{\dot{\mathfrak{A}}p^1k4 + \dot{\mathfrak{B}}p^2k3 + \dot{\mathfrak{C}}p^3k2}{p^4k1} \cdot z^4 - \text{u. ſ. w.}$$

Es iſt aber

$$p^1k1 = {}_{\mathfrak{a}}^{1}A,\ p^1k2 = {}_{\mathfrak{a}}^{2}A,\ p^1k3 = {}_{\mathfrak{a}}^{3}A,\ p^1k4 = {}_{\mathfrak{a}}^{4}A,$$
$$p^2k1 = {}_{\mathfrak{b}}^{2}B,\ p^2k2 = {}_{\mathfrak{b}}^{3}B,\ p^2k3 = {}_{\mathfrak{b}}^{4}B,\ p^3k1 = {}_{\mathfrak{c}}^{3}C,$$
$$p^3k2 = {}_{\mathfrak{c}}^{4}C,\ p^4k1 = {}_{\mathfrak{d}}^{4}D.$$

Folglich iſt auch

$$x = \frac{1}{{}_{\mathfrak{a}}^{1}A} \cdot z - \frac{\dot{\mathfrak{A}}\,{}_{\mathfrak{a}}^{2}A}{{}_{\mathfrak{b}}^{2}B} \cdot z^2 - \frac{\dot{\mathfrak{A}}\,{}_{\mathfrak{a}}^{3}A + \dot{\mathfrak{B}}\,{}_{\mathfrak{b}}^{3}B}{{}_{\mathfrak{c}}^{3}C} \cdot z^3$$

$$-\frac{\dot{\mathfrak{A}}_{a}{}^{4}A + \dot{\mathfrak{B}}_{b}{}^{4}B + \dot{\mathfrak{C}}_{c}{}^{4}C}{\mathfrak{d}^{4}D} . z^4 - \ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots}{a,\ b,\ c,\ d \ldots}$$

Anmerkung.

Die Formeln der Auflösung der gegebenen Aufgabe erhält man, wie aus dem Beweise erhellet, wenn man für x^{σ} die Reihe $\dot{\mathfrak{A}}z^{\frac{\sigma}{\varrho}} + \dot{\mathfrak{B}}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} + \dot{\mathfrak{C}}z^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} + \ldots.$ annimmt und die willkührlich angenommenen Coefficienten dieser Reihe dadurch bestimmt, daſs man die gegebene Reihe $ax^{\delta} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+\delta} + \ldots$ zur $\frac{\sigma}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+\delta}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}$ten Dignität erhebt u. s. w. und die Reihen die man dadurch bekömmt in die angenommene statt $z^{\frac{\sigma}{\varrho}}$, $z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$, substituirt u. s. f. Diese Methode ist zuerst von Hindenburg beobachtet. Eine andere welche von Moivre herrührt, wird ein Beispiel deutlich machen: Wenn nämlich $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$ und hier x durch eine Reihe bestimmt werden soll, die nach Potenzen der z fortschreitet, so nimmt man willkührlich, wie bei der Hindenburgischen Methode, $x = \mathfrak{A}z + \dot{\mathfrak{B}}z^2 + \dot{\mathfrak{C}}z^3 + \ldots$ an, substituirt hierauf aber nicht die Potenzen der gegebenen Reihe in die angenommene, sondern man setzt die erste, zweite, dritte, vierte Potenz u. s. w. der angenommenen Reihe, statt x, x^2, x^3, u. s. f. in die gegebene.

Hier-

Hierdurch wird alſo

$$
\begin{aligned}
z = {} & a\dot{\mathfrak{A}}z + a\dot{\mathfrak{B}}z^2 + a\dot{\mathfrak{C}}z^3 + a\dot{\mathfrak{D}}z^4 + \ldots \\
& + b\mathfrak{b}^2 B z^2 + b\mathfrak{b}^3 B z^3 + b\mathfrak{b}^4 B z^4 + \ldots \\
& + c\mathfrak{c}^3 C z^3 + c\mathfrak{c}^4 C z^4 + \ldots \\
& + d\mathfrak{d}^4 D z^4 + \ldots
\end{aligned}
\qquad \left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots \\ \dot{\mathfrak{A}}, & \dot{\mathfrak{B}}, & \dot{\mathfrak{C}}, \ldots \end{matrix}\right)
$$

Reducirt man nun dieſe Gleichung dadurch auf o daſs man z auf die andere Seite bringt und wird alsdenn nach und nach die Summe der Coefficienten, die zu einerlei Dignitäten der z gehören, gleich o geſetzt, ſo bekömmt man Gleichungen aus welchen ſich folgende Werthe für die angenommenen Coefficienten ergeben:

$$
\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a},\quad \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{b\mathfrak{b}^2 B}{a},\quad \dot{\mathfrak{C}} = -\frac{b\mathfrak{b}^3 B + c\mathfrak{c}^3 C}{a}
$$

$$
\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{b\mathfrak{b}^4 B + c\mathfrak{c}^4 C + d\mathfrak{d}^4 D}{a}, \text{ u. ſ. f.}
$$

$$
\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3 \ldots \\ \dot{\mathfrak{A}}, & \dot{\mathfrak{B}}, & \dot{\mathfrak{C}} \ldots \end{matrix}\right)
$$

In dem gegebenen 1ten und 2ten Beiſpiele müſſen die Klaſſen für den Zeiger $\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots \\ a, & b, & c, \ldots \end{matrix}\right)$ entwickelt werden, deſsen Elemente ganz einfache ſind; hingegen in den eben entwickelten Formeln für $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. w. beziehn ſich die Klaſſenzeichen auf die ſehr zuſammengeſetzten Elemente $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. f. Hieraus wird man einſehn, daſs die Hindenburgiſche Methode der andern vorzuziehn iſt.

§. 104.

2. *Aufgabe.*

Es ſey

$$\alpha z^{R} + \beta z^{R+D} + \gamma z^{R+2D} + \ldots = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \cdots,$$

es wird für x^{σ} eine Reihe verlangt, die nach den Potenzen der z fortſchreitet.

Auflöſung.

Man nehme noch eine dritte verändliche Gröſse y an und ſetze $y = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots$ und drücke x^{σ}, nach der Auflöſung der erſten Aufgabe, zuerſt durch y aus, ſo daſs ſich alſo die Localzeichen der hierdurch gefundenen Reihe, auf die Scale p(a, b, c, d, ...) bezieht, wenn man wieder, wie vorhin, $ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots$ mit p bezeichnet. Iſt dies geſchehn und man hat $x^{\sigma} = Ay^{\frac{\sigma}{\varrho}} + By^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} + Cy^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} + \cdots$, gefunden, ſo ſetze man in dieſe Gleichung, weil auch $y = q$ iſt, wenn unter q die Reihe $\alpha z^{R} + \beta z^{R+D} + \ldots$ verſtanden wird, $q^{\frac{\sigma}{\varrho}}$ ſtatt $y^{\frac{\sigma}{\varrho}}$, $q^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$ ſtatt $y^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$, $q^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}$ ſtatt $y^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}$ u. ſ. f. ſo hat man die für x^{σ} geſuchte Reihe.

Beweis.

Die Richtigkeit dieſes Verfahrens fällt deutlich in die Augen, weil man durch die erſte Vorſchrift für x^{σ} eine durch y ausgedrückte richtige Reihe findet und dieſe

ſe wieder durch die zweite Vorſchrift in eine nach den Dignitäten der z fortlaufende Reihe verwandelt.

Anmerkung.

Hat die gegebene Gleichung die Form

$$\alpha z^m + \beta z^{m+1} + \gamma z^{m+2} + \ldots = a x^m + b x^{m+1} + c x^{m+2} + \ldots$$

und es wird für x eine Reihe durch z verlangt, ſo läſst ſich dieſe Reihe nach dem Moivriſchen Verfahren angeben, ohne eine dritte veränderliche Gröſse zu Hülfe zu nehmen. Nimmt man nämlich

$z = \dot{\mathfrak{A}} z + \dot{\mathfrak{B}} z^2 + \dot{\mathfrak{C}} z^3 + \dot{\mathfrak{D}} z^4 + \ldots$ an, ſo wird, wenn m als eine ganze poſitive Zahl angeſehn wird (§. 83)

$$x^m = {}^{m}_{m}\mathfrak{M} z^m + {}^{m+1}_{m}\mathfrak{M} z^{m+1} + {}^{m+2}_{m}\mathfrak{M} z^{m+2} + \ldots$$

$$x^{m+1} = \overset{+1}{{}^{m+1}_{m}\mathfrak{M}} z^{m+1} + \overset{+1}{{}^{m+2}_{m}\mathfrak{M}} z^{m+2} + \overset{+1}{{}^{m+3}_{m}\mathfrak{M}} z^{m+3} +$$

$$x^{m+2} = \overset{+2}{{}^{m+2}_{m}\mathfrak{M}} z^{m+2} + \overset{+2}{{}^{m+3}_{m}\mathfrak{M}} z^{m+3} + \overset{+2}{{}^{m+4}_{m}\mathfrak{M}} z^{m+4} + .$$

$$x^{m+3} = \overset{+3}{{}^{m+3}_{m}\mathfrak{M}} z^{m+3} + \overset{+3}{{}^{m+4}_{m}\mathfrak{M}} z^{m+4} + \overset{+3}{{}^{m+5}_{m}\mathfrak{M}} z^{m+5} + .$$

〃 〃 〃 〃

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ \dot{\mathfrak{A}}, & \dot{\mathfrak{B}}, & \dot{\mathfrak{C}}, & \dot{\mathfrak{D}} \end{matrix}\right)$$

Subſtituirt man dieſe Werthe der x^m, x^{m+1}, x^{m+2}, x^{m+3}, u. ſ. f. in die gegebene Gleichung, ſo bekömmt man:

$$\alpha z^m + \beta z^{m+1} + \gamma z^{m+2} + \delta z^{m+3} + \ldots$$

$$=$$

$$a\,{}^{m}_{m}\mathfrak{M} z^m + a\,{}^{m+1}_{m}\mathfrak{M} z^{m+1} + a\,{}^{m+2}_{m}\mathfrak{M} z^{m+2} + \ldots$$

$$b\,{}^{m+1}_{m}\mathfrak{M} z^{m+1} + b\,{}^{m+2}_{m}\mathfrak{M} z^{m+2} + \ldots$$

$$c\,{}^{m+2}_{m}\mathfrak{M} z^{m+2} + \ldots$$

u. ſ. w.

Wird

Wird hier ein jeder Coefficient der Reihe $\alpha z^m + \beta z^{m+1} + \cdots$, jedesmal der Summe derjenigen Coefficienten der andern Reihe gleich gesetzt, welche sich auf die nämliche Dignität der z beziehn wozu er gehört, so entstehen die Gleichungen:

$$\alpha = {}_{a m}{}^{m}\mathfrak{M}$$

$$\beta = {}_{a m}{}^{m+1}\mathfrak{M} + {}_{b m}{}^{1\, m+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$$

$$\gamma = {}_{a m}{}^{m+2}\mathfrak{M} + {}_{b m}{}^{1\, m+2}\overset{+1}{\mathfrak{M}} + {}_{c m}{}^{2\, m+2}\overset{+2}{\mathfrak{M}}$$

" " " "

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, \ldots \\ \dot{\mathfrak{A}}, & \dot{\mathfrak{B}}, & \dot{\mathfrak{C}}, \ldots\end{matrix}\right)$$

Werden nun vermittelst dieser Gleichungen die Werthe der $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. s. f. aufgesucht, so giebt die erste Gleichung den Werth des $\dot{\mathfrak{A}}$ durch α und a; die zweite Gleichung giebt den Werth des $\dot{\mathfrak{B}}$ durch β, a, b und $\dot{\mathfrak{A}}$ die dritte giebt den Werth des $\dot{\mathfrak{C}}$ durch γ, a, b, c, $\dot{\mathfrak{A}}$ und $\dot{\mathfrak{B}}$, u. s. w. so dass man also durch diese Gleichungen die Werthe aller Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. s. f. durch a, b, c, d, ... und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ bestimmen kann.

β. Independente Formeln. a)

§. 105.

3. *Aufgabe.*

Es soll unter der Anname, dass $z = ax^\varrho + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots$, eine unabhängige Localformel für das n+1te Glied derjenigen Reihe angegeben werden, welche x^σ durch fortlaufende Potenzen der z darstellt.

Auf-

a) Hierunter werden die gedacht, welche ein jedes Glied indegedent von allen übrigen geben.

Auflösung. a)

Bezeichnet man die Reihe $ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots$ mit p, so ist

$$x^{\sigma}\urcorner(n+1) = \frac{\sigma}{\sigma+n\delta}\cdot p^{-\frac{\sigma+n\delta}{\varrho}}\, k\,(n+1)\; z^{\frac{\sigma+n\delta}{\varrho}}$$

1. *Zusatz.*

$$\text{Es ist } x^{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma}\cdot p^{-\frac{\sigma}{\varrho}}\, k1\,.\, z^{\frac{\sigma}{\varrho}}$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma+\delta}\cdot p^{-\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}\, k2\,.\, z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma+2\delta}\cdot p^{-\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}\, k3\,.\, z^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma+3\delta}\cdot p^{-\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}\, k4\,.\, z^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}$$

″ ″ ″ ″ ″ ″

p(a, b, c, d, . . .)

4. *Zu-*

a) Den Beweis für die Richtigkeit dieser Auflösung, welcher seiner Weitläuftigkeit wegen hier übergangen wird, enthält die Dissertatio academica auctore M. Henrico Augusto Rothe, welche den Titel führt; Formulae de Serierum reversione demonstratio universalis, signis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita. Lipsiae 1793. 4.

Wird $\frac{\sigma + n\sigma}{\varrho} = {}^{n}m$ und daher $\frac{\sigma}{\varrho} = {}^{\circ}m$ gesetzt, so läſst sich die Formel der Auflösung auch so ausdrücken:

$$x^{\sigma} 7 (n+1) = \frac{{}^{\circ}m}{{}^{n}m} \cdot p^{-{}^{n}m} k(n+1) \cdot z^{{}^{n}m}$$

Setzt man in diese Gleichung statt $p^{-{}^{n}m} k(n+1)$ den gleichgültigen Ausdruck, welchen der 1te Zusatz des §. 85 giebt, so erhält man $x^{\sigma} 7 (n+1) =$

$$\frac{{}^{\circ}m}{{}^{n}m} \Big\{ {}^{-{}^{n}m}\mathfrak{A}_a {}^{-{}^{n}m-1}{}_a{}^{n}A + {}^{-{}^{n}m}\mathfrak{B}_a {}^{-{}^{n}m-2}{}_b{}^{n}B + {}^{-{}^{n}m}\mathfrak{C}_a {}^{-{}^{n}m-3}{}_c{}^{n}C + {}^{-{}^{n}m}\mathfrak{D}_a {}^{-{}^{n}m-4}{}_d{}^{n}D + \ldots \Big\} z^{{}^{n}m}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots}{b,\ c,\ d,\ e, \ldots}$$

Anmerkung.

Dividirt man die einzelnen Glieder der letzten Formel durch $a^{-{}^{n}m}$ und multiplicirt dann das Ganze wieder mit $a^{-{}^{n}m}$, so wird $x^{\sigma} 7 (n+1) =$

$$\frac{{}^{\circ}m}{{}^{n}m} \Big\{ \frac{{}^{-{}^{n}m}\mathfrak{A}_a{}^{n}A}{a} + \frac{{}^{-{}^{n}m}\mathfrak{B}_b{}^{n}B}{a^2} + \frac{{}^{-{}^{n}m}\mathfrak{C}_c{}^{n}C}{a^3} + \ldots \Big\} \left(\frac{z}{a}\right)^{{}^{n}m}$$

Substituirt man hierinn statt ${}^{-{}^{n}m}\mathfrak{B}$, ${}^{-{}^{n}m}\mathfrak{C}$, ${}^{-{}^{n}m}\mathfrak{D}$ u. s. w. die Werthe $\frac{{}^{n}m+1}{{}^{n}m}\mathfrak{A}$ / 2, $-\frac{{}^{n}m+2}{{}^{n}m}\mathfrak{B}$ / 3, $\frac{{}^{n}m+3}{{}^{n}m}\mathfrak{C}$ / 4, u. s. f.

so bekömmt man, da $\frac{-{}^{n}m\mathfrak{A}}{{}^{n}m} = -1$ ist,

$$x^{\sigma}\,7\,(n+1) = -{}^{\circ}m\left\{\frac{{}^{n}_{a}A}{a} - \frac{{}^{nm+1}\mathfrak{A}_{b}\,{}^{n}B}{2a^{2}} + \frac{{}^{nm+2}\mathfrak{B}_{c}\,{}^{n}C}{3a^{3}} - \frac{{}^{nm+3}\mathfrak{C}_{d}\,{}^{n}D}{4a^{4}} + \cdots\right\}\left(\frac{z}{a}\right)^{nm}$$

Unter dieser Form ist die Formel für $x^{\sigma}\,7(n+1)$ von Eschenbach *a*), einem Schüler Hindenburgs, gefunden. Hindenburg leitete hierauf aus dieser, die letzte des Zusatzes und aus dieser wieder die in der Auflösung aufgestellte Formel her.

§. 106.

4. *Aufgabe. b*).

Es wird unter der Bedingung, dass

$$\alpha z^{R} + \beta z^{R+D} + \gamma z^{R+D} + \cdots = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \cdots$$

für x^{σ} eine allgemeine independente Formel einer Reihe gesucht, welche nach den Dignitäten der z fortgeht.

Auf-

a) Eschenbach, de Serierum Rev. Diss. Lipsiae 1789. pag. 24. Er wusste aber die Richtigkeit seiner Formel nicht zu beweisen; dies gab zu der vorhin genannten Rothischen äusserst scharfsinnigen Dissertation Veranlassung. In dieser kömmt Rothe direct auf die Localformel und aus dieser folgert er die Eschenbachsche. Dass sich die Localformel auch aus dem allgemeinen Lagrangischen Satze $x - z\varphi x = \psi y + z\varphi_y \frac{d\psi y}{dy} + \cdots$, wo $y = x - z\varphi x$, herleiten lasse, zeigt Pfaff in den beiden Abhandlungen in welchen er einen strengen Beweis für den genannten Satz giebt. (Arch. der Mat. H. I. S. 81, und Disquis. analyt. S. 227.).

b) Dies wichtige Problem machte Hindenburg in folgender Schrift bekannt: Problema solutum maxime universale ad Serierum Reversionem, Formulis localibus et combinatorio-analyticis absolvendam Paralipomenon. Lipsiae 1793.

Auflösung.

1) Man bezeichne die erste Seite der Gleichung mit q und die andere mit p und setze $y = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots$

2) Man bestimme x^{σ} durch eine Reihe welche nach y fortschreitet und zwar vermittelst des ersten Zusatzes zum §. 105. Hierdurch erhält man, wenn wieder unter ${}^{n}m$ der Ausdruck $\frac{\sigma+n\delta}{\varrho}$, unter $\underset{n}{m}$ aber der Ausdruck $\frac{\sigma}{\sigma+n\delta}$ verstanden wird,

$$x^{\sigma} = \underset{0}{m}.q^{-{}^{0}m}k1.y^{{}^{0}m} + \underset{1}{m}.q^{-{}^{1}m}k2.y^{{}^{1}m} + \underset{2}{m}.q^{-{}^{2}m}k3.y^{{}^{2}m} + \ldots$$

$$q(a, b, c, d, \ldots)$$

3) Man setze auch $y = \alpha z^{R} + \beta z^{R+D} + \gamma z^{R+2D} + \ldots$, so wird nach §. 87.

$$y^{{}^{0}m} = p^{{}^{0}m}k1.z^{{}^{0}m.R} + p^{{}^{0}m}k2.z^{{}^{0}mR+D} + p^{{}^{0}m}k3.z^{{}^{0}mR+2D} + \ldots$$

$$y^{{}^{1}m} = p^{{}^{1}m}k1.z^{{}^{1}mR} + p^{{}^{1}m}k2.z^{{}^{1}mR+D} + p^{{}^{1}m}k3.z^{{}^{1}mR+2D} + \ldots$$

$$y^{{}^{2}m} = p^{{}^{2}m}k1.z^{{}^{2}mR} + p^{{}^{2}m}k2.z^{{}^{2}mR+D} + p^{{}^{2}m}k3.z^{{}^{2}mR+2D} + \ldots$$

" " " " " "

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$$

4) Man substituire die in 3 entwickelten Werthe statt $y^{{}^{0}m}$, $y^{{}^{1}m}$, $y^{{}^{2}m}$, $y^{{}^{3}m}$ in die in 2) angegebene Reihe, so hat man die verlangte Formel.

Beweis.

Dass durch die Auflösung eine richtige Reihe entsteht welche x^{σ} durch z ausdrückt, erhellet hier eben so, wie bei der Aufgabe des §. 104. Dass aber diese Reihe auch independent sey, folgt daraus weil sie vermittelst independenter Formeln erhalten wird.

Combinatorifche Schriften.

Infinitinomii Dignitatum, Exponentis indeterminati, Hiftoria, Leges ac Formulae; auctore Car. Frid. Hindenburg. Editio aucta et emendata. Goettingae 1779. 4.

Ejusdem Novi Syftematis Permutationum, Combinationum ac Variationum primae lineae. Lipfiae 1781. 4.

Hindenburgs 6 Bogen lange Vorrede zu Rüdigers Specim. analyt. de lineis curvis fecundi ordinis; in dilucidationem Analyfeos Finitorum Käftnerianae. Lipfiae 1784. 4.

Mehrere Stücke des Leipziger Magazins zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie und des Magazins für reine und angewandte Mathematik, von den Jahren 1781—1788. 8.

Hier. Chriftoph. Vilelm. Efchenbachii Epiftola ad fratrem Chriftian. Gotthold Efchenbach. (Ineft in locum Kaeftnerianum de multipli Angulorum Tangentibus commentatio.). Lipfiae 1789. 4.

De Serierum Reverfione formulis analytico-combinatoriis exhibita fpecimen. Auctore Hier. Chriftoph. Vilelm. Efchenbach. Lipfiae 1789. 4.

Combinatorifche Analytik und Theorie der Dimenfionszeichen in Parallele geftellt von Heinrich Auguft Töpfer. Leipzig 1793. 8.

Formulae de Seriernm Reverfione demonftratio univerfalis, fignis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita. Auctore Henrico Augufto Rothe. Lipfiae 1793. 8.

Pro

Problema solutum maxime universale ad Serierum Reversionem formulis localibus et combinatorio-analyticis absolvendam Paralipomenon. Auctore Caroli Friderici Hindenburg. Lipsiae 1793. 4.

Archiv der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg. Von den Jahren 1791 — 1798.

De usu Logarithmorum Infinitinomii in theoria Aequationum, dissertatio combinatorio-analytica. Auctore Mauricio de Prasse. Lipsiae 1796. 4.

Der Polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis nebst einigen verwandten und andern Sätzen. Neu bearbeitet und dargestellt von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg. Leipzig 1796. 8.

Disquisitiones Analyticae maxime ad Calculum integralem et Doctrinam Serierum pertinentes. Volumen I. Auctore Joanne Friderico Pfaff. Helmstadii 1797. 4. Caput II. Tractatus de Reversione Serierum, sive de Resolutione Aequationum per Series.

Staatliche Bibliothek Bamberg

Durch

Durch P; Z; v. o; v. u wird angedeutet: Pagina, Zeile, von oben, von unten.

Ort	Fehler	Verbesserung
P. 4, Z. 15, v. u.	combinatorische Behandlung.	arithmetisch combinatorische Behandlung
P. 13, Z. 8, v. u.	Linken nach der Rechten	Rechten nach der Linken
P. 63, Z. 13, v. o.	${}^{n-1\prime}A$	${}^{n-1\prime}_{a}A$
P. 67, Z. 7, v. u.	$\mathfrak{N}$	$\overset{-1}{\mathfrak{N}}$
— — Z. 3, v. u.	$\mathfrak{N}$	${}^{-1}\mathfrak{N}$
P. 68, Z. 2, v. u.	$\mathfrak{N}$	${}'\overset{-1}{\mathfrak{N}}$
— — Z. 10. v. o.	${}_{d}{}'\mathfrak{N} + {}_{e}{}'\mathfrak{N}$	${}_{d}{}'\overset{-1}{\mathfrak{N}} + {}_{e}{}'\overset{-1}{\mathfrak{N}}$
P. 97, Z. 9. v. u.	substituirt.	substituirt. *a*)
P. 97,	Unten fehlt die Note: *a*) Die Binion bc ausgenommen.	
P. 126, Z. 7, v. u.	Ntion	Mtion
P. 127, Z. 8, v. u.	M—2tion	M—(m—2)tion
P. 149, Z. 6, v. o.	r^6	r^4
P. 198, Z. 4, v. o.	in welchen	in welchem
— — Z. 6, v. o.	in welchen	in welchem
— — Z. 9, v. o.	Variationenen	Variationen
P. 202, Z. 4, v. o.	z^{a+b+c}	${}_{z}^{a+b+c}$
P. 210, Z. 13, v. o.	zm^{δ}	${}_{z}^{m\delta}$
P. 216, Z, 7, v. u.	dz^7	dz^8
— — Z. 6, v. u.	$Cz^6 \quad Dz^8$	$Cz^7 \quad Dz^9$
P. 256, Z. 11, v. o.	ϱ	π
— — Z. 14, v. o.	π	ϱ
P. 270, Z. 1, v. u.	$\mathfrak{A}$	${}^{-2}\mathfrak{A}$
P. 277, Z. 3, v. o.	$\frac{{}_{a}^{1}A}{\alpha}$	$\frac{{}_{a}^{1}A}{\alpha^2}$
P. 316, Z. 10, v. o.	z =	x =

Jena,
gedruckt bei Prager und Comp.

I. TABELLE.

$${}_i^1J,\ {}_i^2J,\ {}_i^3J,\ {}_i^4J,\ {}_i^5J,\ {}_i^6J,\ {}_i^7J,\ {}_i^8J,\ {}_i^9J,\ {}_i^{10}J$$

$${}_i^1J \begin{cases} {}_a{}^1A = a \end{cases}$$

$${}_i^2J \begin{cases} {}_a{}^2A = b \\ {}_b{}^2B = a^2 \end{cases}$$

$${}_i^3J \begin{cases} {}_a{}^3A = c \\ {}_b{}^3B = 2ab \\ {}_c{}^3C = a^3 \end{cases}$$

$${}_i^4J \begin{cases} {}_a{}^4A = d \\ {}_b{}^4B = \begin{cases} 2ac \\ b^2 \end{cases} \\ {}_c{}^4C = 3a^2b \\ {}_d{}^4D = a^4 \end{cases}$$

$${}_i^5J \begin{cases} {}_a{}^5A = e \\ {}_b{}^5B = \begin{cases} 2ad \\ 2bc \end{cases} \\ {}_c{}^5C = \begin{cases} 3a^2c \\ 3ab^2 \end{cases} \\ {}_d{}^5D = 4a^3b \\ {}_e{}^5E = a^5 \end{cases}$$

$${}_i^6J \begin{cases} {}_a{}^6A = f \\ {}_b{}^6B = \begin{cases} 2ae \\ 2bd \\ c^2 \end{cases} \\ {}_c{}^6C = \begin{cases} 3a^2d \\ 6abc \\ b^3 \end{cases} \\ {}_d{}^6D = \begin{cases} 4a^3c \\ 6a^2b^2 \end{cases} \\ {}_e{}^6E = 5a^4b \\ {}_f{}^6F = a^6 \end{cases}$$

$${}^7J \begin{cases} {}_a{}^7A = g \\ {}_b{}^7B = \begin{cases} 2af \\ 2be \\ 2cd \end{cases} \\ {}_c{}^7B = \begin{cases} 3a^2e \\ 6abd \\ 3ac^2 \\ 3b^2c \end{cases} \\ {}_d{}^7D = \begin{cases} 4a^3d \\ 12a^2bc \\ 4ab^3 \end{cases} \\ {}_e{}^7E = \begin{cases} 5a^4c \\ 10a^3b^2 \end{cases} \\ {}_f{}^7F = 6a^5b \\ {}_g{}^7G = a^7 \end{cases}$$

$${}_i^8J \begin{cases} {}_a{}^8A = h \\ {}_b{}^8B = \begin{cases} 2ag \\ 2bf \\ 2ce \\ d^2 \end{cases} \\ {}_c{}^8C = \begin{cases} 3a^2f \\ 6abe \\ 6acd \\ 3b^2d \\ 3bc^2 \end{cases} \\ {}_d{}^8D = \begin{cases} 4a^3e \\ 12a^2bd \\ 6a^2c^2 \\ 12ab^2c \\ b^4 \end{cases} \\ {}_e{}^8E = \begin{cases} 5a^4d \\ 20a^3bc \\ 10a^2b^3 \end{cases} \\ {}_f{}^8F = \begin{cases} 6a^5c \\ 15a^4b^2 \end{cases} \\ {}_g{}^8G = 7a^6b \\ {}_h{}^8H = a^8 \end{cases}$$

$${}_i^9J \begin{cases} {}_a{}^9A = \\ {}_b{}^9B = \begin{cases} 2ah \\ 2bg \\ 2cf \\ 2de \end{cases} \\ {}_c{}^9C = \begin{cases} 3a^2g \\ 6abf \\ 6ace \\ 3ad^2 \\ 3b^2e \\ 6bcd \\ c^3 \end{cases} \\ {}_d{}^9D = \begin{cases} 4a^3f \\ 12a^2be \\ 12a^2cd \\ 12ab^2d \\ 12abc^2 \\ 4b^3c \end{cases} \\ {}_e{}^9E = \begin{cases} 5a^4e \\ 20a^3bd \\ 10a^3c^2 \\ 30a^2b^2c \\ 5ab^4 \end{cases} \\ {}_f{}^9F = \begin{cases} 6a^5d \\ 30a^4bc \\ 20a^3b^3 \end{cases} \\ {}_g{}^9G = \begin{cases} 7a^6c \\ 21a^5b^2 \end{cases} \\ {}_h{}^9H = 8a^7b^2 \\ {}_i{}^9I = a^9 \end{cases}$$

$${}_i^{10}J \begin{cases} {}_a{}^{10}A = k \\ {}_b{}^{10}B = \begin{cases} 2ai \\ 2bh \\ 2cg \\ 2df \\ e^2 \end{cases} \\ {}_c{}^{10}C = \begin{cases} 3a^2h \\ 6abg \\ 6acf \\ 6ade \\ 3b^2f \\ 6bce \\ 3bd^2 \\ 3c^2d \end{cases} \\ {}_d{}^{10}D = \begin{cases} 4a^3g \\ 12a^2bf \\ 12a^2ce \\ 6a^2d^2 \\ 12ab^2e \\ 24abcd \\ 4ac^3 \\ 4b^3d \\ 6b^2c^2 \end{cases} \\ {}_e{}^{10}E = \begin{cases} 5a^4f \\ 20a^3be \\ 20a^3cd \\ 30a^2b^2d \\ 30a^2bc^2 \\ 20ab^3c \\ b^5 \end{cases} \\ {}_f{}^{10}F = \begin{cases} 6a^5e \\ 30a^4bd \\ 15a^4c^2 \\ 60a^3b^2c \\ 15a^2b^4 \end{cases} \\ {}_g{}^{10}G = \begin{cases} 7a^6d \\ 42a^5bc \\ 35a^4b^3 \end{cases} \\ {}_h{}^{10}H = \begin{cases} 8a^7c \\ 28a^6b^2 \end{cases} \\ {}_i{}^{10}I = 9a^8b \\ {}_k{}^{10}K = a^{10} \end{cases}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e, & \ldots \end{matrix}\right)$$

II. TABELLE.

Anzahl aller Combinationen zur Summe *n* für die Elemente

1, 2, 3, 4, 5, ...m

Werthe der Zahl n

Zahl m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8
3	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27
4	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54
5	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84
6	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110
7	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131
8	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
21	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Zahl m	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16
3	30	33	37	40	44	48	52	56	61	65	70	75	80	85	91
4	64	72	84	94	108	120	136	150	169	185	206	225	249	270	297
5	101	119	141	164	192	221	255	291	333	377	427	480	540	603	674
6	136	163	199	235	282	331	391	454	532	612	709	811	931	1057	1206
7	164	201	248	300	364	436	522	618	733	860	1009	1175	1367	1579	1824
8	186	230	283	352	434	525	638	764	919	1090	1297	1527	1801	2104	2462
9	201	252	318	393	488	598	732	887	1076	1291	1549	1845	2194	2592	3060
10	212	267	340	423	530	653	807	984	1204	1455	1761	2112	2554	3015	3590
11	219	278	355	445	560	695	863	1060	1303	1586	1930	2331	2812	3370	4035
12	224	285	366	460	582	725	905	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401
13	227	290	373	471	597	747	935	1158	1436	1763	2164	2637	3210	3882	4691
14	229	293	378	478	608	762	957	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057	4920
15	230	295	381	483	615	773	972	1210	1508	1861	2297	2815	3446	4192	5096
16	231	296	383	486	620	780	983	1225	1530	1891	2339	2871	3523	4293	5231
17	231	297	384	488	623	785	990	1236	1545	1913	2369	2913	3579	4370	5332
18	231	297	385	489	625	788	995	1243	1556	1928	2391	2943	3621	4426	5409
19	231	297	385	490	626	790	998	1248	1563	1939	2406	2965	3651	4468	5465
20	231	297	385	490	627	791	1000	1251	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507
21	231	297	385	490	627	792	1002	1255	1575	1950	2436	3010	3718	4565	5604

1. *Aufgabe.* Die Anzahl aller Combinationen zur Summe n anzugeben, die für die Elemente 1, 2, 3,..m möglich ſind.

Auflöſung. Man ſuche in der Tabelle die Zahlen n und m auf, ziehe von n aus eine vertikale und von m aus eine horizontale Linie; die Zahl iſt alsdenn die geſuchte, in welcher ſich gedachte Linien ſchneiden.

2. *Aufgabe.* Die Anzahl der Combinationen $^{n}\mathfrak{M}$ für die Elemente 1, 2, 3, ... n zu beſtimmen.

Auflöſung. Man ſuche für die Elemente 1, 2, 3, . . m die Anzahl aller Combinationen zur Summe n—m. (1 Aufg. Aufl.).

3. *Aufgabe.* Die Anzahl der Combinationen der $^{n}\mathfrak{M}'$ für die Elemente 1, 2, 3, .. n zu berechnen.

Auflöſung. Man ſuche für die Elemente 1, 2, 3, ..., m, die Anzahl aller Combinationen zur Summe $n - \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$. (1 Aufg. Aufl.).

Anmerkung. Bezeichnet man willkührlich die Anzahl aller für die Elemente 1, 2, 3...m möglichen Combinationen zur Summe n, mit $n^{(m)}$, ſo daſs alſo $n^{(m)}$ keine Dignität bedeutet, ſo iſt $n^{(m)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3^{(3)} + \cdots + (n-m)^{(m)}$.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Stahl, Konrad Dietrich Martin,

Grundriss der Combinationslehre nebst Anwendung derselben auf die Analysis

Jena [u.a.] 1800

Bamberg, Staatsbibliothek -- AGB P 34
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11421424-0
VD18 11889934-002